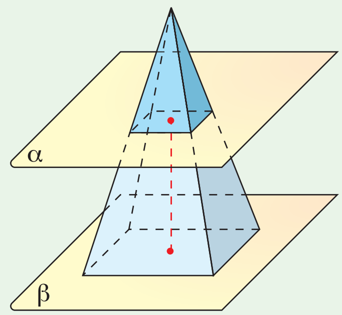
Approfondimento

Le superfici del tronco di piramide e del tronco di cono

Il tronco di piramide

Consideriamo una piramide e sezioniamola con un piano parallelo al piano della base; otteniamo così un tronco di piramide (***figura 1***).

Figura 1

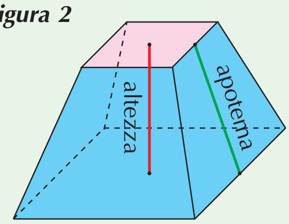


Se la piramide P è retta, sappiamo che le altezze delle facce laterali sono tutte congruenti fra loro e costituiscono l'apotema; di conseguenza, anche le altezze delle facce laterali del tronco di piramide sono tutte congruenti fra loro perché sono la differenza fra l'apotema della piramide P data e l'apotema della piramide P'. In questo caso, e a maggior ragione quando la piramide P è regolare, l'area S_ℓ della superficie laterale del tronco di piramide è data dalla somma delle aree dei trapezi che sono le facce laterali (***figura 2***):

$$S_\ell = \frac{(b_1 + B_1)a}{2} + \frac{(b_2 + B_2)a}{2} + \ldots\ldots + \frac{(b_n + B_n)a}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} a\left[(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)\right]$$

Figura 2



dove i simboli b_i indicano le misure delle basi minori di ciascun trapezio e i simboli B_i indicano le misure delle corrispondenti basi maggiori. In definitiva, tenendo presente che la somma dei b_i è il perimetro $2p'$ della base della piramide P' e che la somma dei B_i è il perimetro $2p$ della base della piramide P, l'area delle superficie laterale di un tronco di piramide retto è uguale a

$$\boxed{S_\ell} = \frac{1}{2} a(2p' + 2p) = \boxed{a(p' + p)}$$

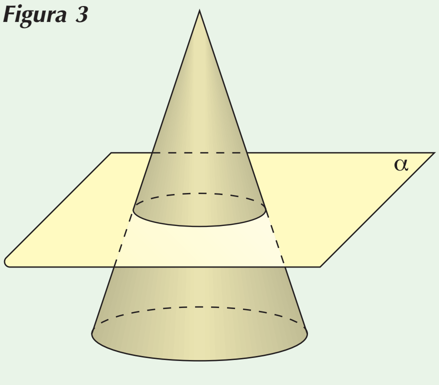
dove evidentemente p' e p sono i semiperimetri dei due poligoni di base.
L'area S_t della superficie totale è poi la somma dell'area della superficie laterale con le aree A e A' dei due poligoni di base:

$$S_t = S_\ell + A + A'$$

Il tronco di cono

Consideriamo un cono e sezioniamolo con un piano parallelo al piano della base; otteniamo così un tronco di cono (***figura 3***).
Lo sviluppo della superficie laterale di questo solido è quindi quella in ***figura 4*** di pagina successiva e si può calcolare togliendo dalla superficie laterale del cono completo C la superficie laterale del cono C'.
Indichiamo con r e R le misure dei raggi delle due circonferenze di base, con a la misura dell'apotema del tronco e con a' la misura dell'apotema del cono C' e procediamo al calcolo di S_ℓ.

Figura 3



Superficie laterale del cono C : $\pi R \cdot (a + a')$

Superficie laterale del cono C' : $\pi r \cdot a'$

Superficie laterale del tronco: $S_\ell = \pi R(a + a') - \pi r a'$

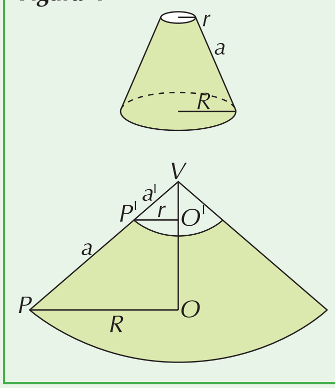
Dalla similitudine dei triangoli VOP e $VO'P'$ si ricava che $a' = \dfrac{ar}{R-r}$; sostituendo nell'espressione di S_ℓ e svolgendo il calcolo si trova che:

$$\boxed{S_\ell = \pi a(R+r)}$$

L'area S_t della superficie totale di conseguenza è uguale a:

$$\boxed{S_t = \pi a(r+R) + \pi r^2 + \pi R^2}$$

Figura 4



ESERCIZI

1 Una piramide retta a base quadrata ha gli angoli diedri formati dalla base con le facce laterali che sono ampi 60° e di essa si sa che il lato di base è $24a$. Determina a quale distanza dal vertice occorre condurre un piano parallelo alla base in modo che la superficie laterale della piramide che si stacca sia uguale a quella del tronco di piramide che si viene a formare. [distanza del vertice dal piano $= 6a\sqrt{6}$]

2 In un tronco di piramide quadrangolare regolare gli spigoli delle due basi sono uno il triplo dell'altro; si sa inoltre che le facce laterali formano angoli diedri di ampiezza 60° con il piano della base maggiore. Qual è l'altezza del tronco se la sua superficie totale è $416\ell^2$? [$4\sqrt{3}\ell$]

3 In un tronco di cono, il raggio della base maggiore B è il doppio di quello della base minore B'. Il cono avente per base B' e vertice nel centro di B ha superficie laterale di area 30cm². Quanto misura l'area della superficie laterale del tronco? Con questi dati è possibile valutarne la superficie totale? [$S_\ell = 90\text{cm}^2$; no]

4 Un piano parallelo alla base di un cono retto individua un tronco di cono di cui si sa che l'area della superficie laterale è uguale a $14\pi\ell^2$ e l'area della superficie totale è $32\pi\ell^2$. Calcola le lunghezze del raggio di base del cono e del suo apotema sapendo che il rapporto fra i raggi delle due basi del tronco è uguale a $\frac{3}{4}$. $\left[r = \frac{12}{5}\ell\sqrt{2},\ a = \frac{20}{3}\ell\sqrt{2}\right]$