

## Equazioni e disequazioni esponenziali per via grafica

Alcune equazioni o disequazioni esponenziali non possono essere risolte per via algebrica ed è necessario ricorrere a metodi grafici.

### I esempio

$$2^x - 2 = x$$

Riscriviamo dapprima l'equazione in modo da separare la parte esponenziale da quella polinomiale  $2^x = x + 2$ .

Come abbiamo già fatto in altri casi, possiamo pensare che tale equazione sia l'equazione risolvente di un sistema, e precisamente di

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2^x \end{cases}$$

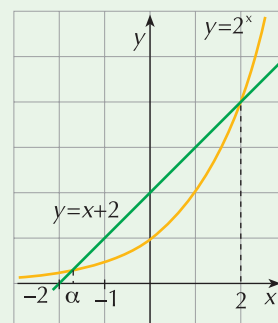
Dal punto di vista grafico, questo sistema rappresenta l'intersezione della curva esponenziale di equazione  $y = 2^x$  con la retta di equazione  $y = x + 2$  (figura a lato).

L'osservazione del grafico delle due curve nello stesso piano cartesiano indica che ci sono due soluzioni reali:

- la prima, indicata con  $\alpha$  sul grafico, ha valore negativo compreso fra  $-2$  e  $-1$
- la seconda sembra essere uguale a  $2$ .

Per essere certi che la seconda soluzione sia proprio  $2$  basta eseguire una verifica: sostituendo  $2$  al posto dell'incognita nell'equazione iniziale, otteniamo  $2^2 - 2 = 2$  che è vera.

L'insieme delle soluzioni è quindi  $S = \{\alpha, 2\}$ , essendo  $-2 < \alpha < -1$ ; per una valutazione più precisa di  $\alpha$  si può ricorrere ad un software come *Wiris* o *GeoGebra*.



### II esempio

$$1 - 3x^2 \leq 3^x - 1$$

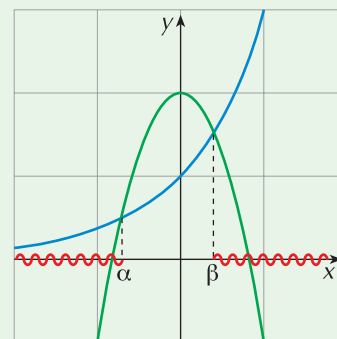
Riscriviamo la disequazione nella forma  $2 - 3x^2 \leq 3^x$  e confrontiamo i grafici delle funzioni  $y = 2 - 3x^2$  e  $y = 3^x$  (figura a lato).

La prima funzione è una parabola, la seconda è una curva esponenziale elementare; esse si intersecano nei punti di ascissa  $\alpha, \beta$  dove

$$-1 < \alpha < 0 \quad \text{e} \quad 0 < \beta < 1$$

Poiché vogliamo che la parabola sia "minore o uguale" della curva esponenziale, le soluzioni della disequazione sono i valori di  $x$  tali che

$$x \leq \alpha \vee x \geq \beta$$



## ESERCIZI

### Equazioni

1 Per risolvere graficamente l'equazione  $2^{x-3} + x^2 - 4 = 0$  occorre confrontare le due funzioni:

- a.  $f(x) = 2^{x-3}$  e  $g(x) = x^2 - 4$
- b.  $f(x) = 2^{x-3}$  e  $g(x) = 4 - x^2$
- c.  $f(x) = x^2 - 4$  e  $g(x) = 2^{3-x}$
- d. nessuna delle precedenti.

[b.]

Risolvi graficamente le seguenti equazioni esponenziali (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

### 2 ESERCIZIO GUIDATO

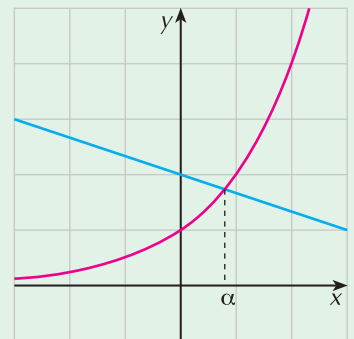
$$2^x + \frac{1}{3}x - 2 = 0$$

Separiamo la parte esponenziale e riscriviamo l'equazione in

questo modo:  $2^x = -\frac{1}{3}x + 2$

Confrontiamo i grafici delle funzioni:  $y = 2^x$  e  $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa  $\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ .



3  $2^x + 3x = 0$

$[S = \{\alpha\}, \text{ con } -1 < \alpha < 0]$

4  $2^x - \frac{1}{2}x = 0$

$[S = \emptyset]$

5  $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2x - 1 = 0$

$[S = \{0, \alpha\}, \text{ con } -3 < \alpha < -2]$

6  $1 - x^2 - 3^x = 0$

$[S = \{0, \alpha\}, \text{ con } -1 < \alpha < 0]$

7  $x^2 - x - 2^x = 0$

$[S = \{\alpha\}, \text{ con } -1 < \alpha < 0]$

8  $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = x^2$

$[S = \{\alpha, \beta\}, \text{ con } -2 < \alpha < -1 \text{ e } 1 < \beta < 2]$

### 9 ESERCIZIO GUIDATO

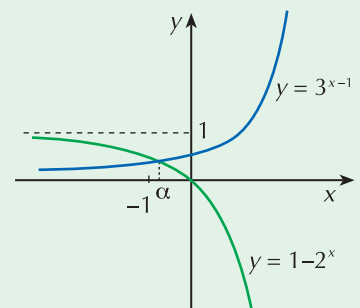
$$3^{x-1} + 2^x - 1 = 0$$

Riscriviamo l'equazione nella forma  $3^{x-1} = 1 - 2^x$

e confrontiamo i grafici delle funzioni di equazioni

$y = 3^{x-1}$  e  $y = 1 - 2^x$

Le due curve si intersecano nel punto di ascissa  $\alpha$  con  $-1 < \alpha < 0$ ; l'equazione ha dunque soluzione  $x = \alpha$ .



10  $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2^{x+2} - 1 = 0$

$[S = \{\alpha\}, \text{ con } -2 < \alpha < -1]$

11  $e^{-x} + 2^x - 3 = 0$

$[S = \{\alpha, \beta\}, \text{ con } -1 < \alpha < 0 \wedge 1 < \beta < 2]$

12  $3^x + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 0$

$[S = \emptyset]$

13  $2^{x+1} - 3^{1-x} = 1$

$[S = \{\alpha\}, \text{ con } 0 < \alpha < 1]$

## Disequazioni

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni esponenziali (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

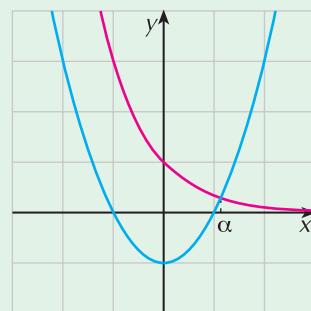
### 14 ESERCIZIO GUIDATO

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > x^2 - 1$$

Costruiamo i grafici delle funzioni  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  e  $y = x^2 - 1$  e confrontiamoli.

Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa  $\alpha$ , con  $1 < \alpha < 2$ .

La curva esponenziale è "minore" della parabola se  $x > \alpha$ .



15  $2^x - 4 > \frac{1}{2}x$

$[x < \alpha \vee x > \beta, \text{ con } -8,5 < \alpha < -7,5 \wedge 2 < \beta < 3]$

16  $2^{x-3} - x < 0$

$[\alpha < x < \beta, \text{ con } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \wedge 5 < \beta < 6]$

17  $e^{3-x} \geq x^2 - x + 2$

$[x < \alpha, \text{ con } 1,5 < \alpha < 2]$

18  $x^2 - 3x > e^{2x-1}$

$[x < \alpha, \text{ con } -\frac{1}{2} < \alpha < 0]$

19  $e^x \leq 2 - x$

$[x \leq \alpha, \text{ con } 0 < \alpha < 1]$

20  $1 - 2^{-x} \geq x$

$[-1 \leq x \leq 0]$

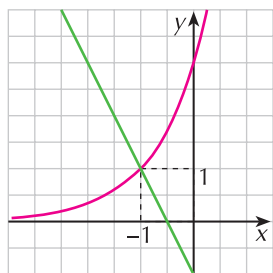
21  $3^{-x} + 3^x > 4$

$[x < \alpha \vee x > \beta, \text{ con } -1,5 < \alpha < -1 \wedge 1 < \beta < 1,5]$

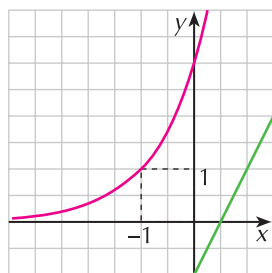
22  $e^{2-x} > 1 + 2^{-x}$

$[x < \alpha, \text{ con } 1,5 < \alpha < 2]$

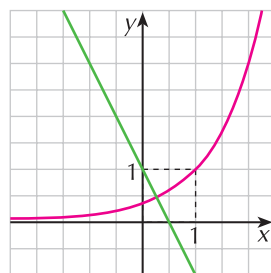
23 Quale fra i seguenti grafici permette di individuare le soluzioni della disequazione  $3^{x-1} + 2x - 1 < 0$ ?



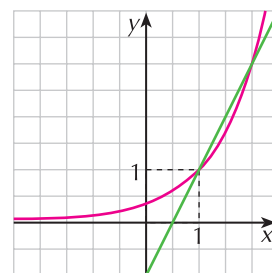
a.



b.



c.



d.

[c.]