Cap 1. INSIEMI E FUNZIONI

Rivedi la teoria

Il concetto di insieme

Affinché un raggruppamento di oggetti possa essere considerato un insieme deve esistere una proprietà caratteristica in base alla quale sia possibile stabilire se un elemento qualunque appartiene o no a quel raggruppamento. Per questo motivo:

- formano un insieme:
  - i numeri naturali multipli di 3
  - gli abitanti della città di Torino
  - gli studenti della tua scuola sufficienti in matematica allo scrutinio del primo quadrimestre
- non formano un insieme:
  - gli studenti bravi della tua scuola
  - i cibi più gustosi della cucina tradizionale italiana
  - i libri più interessanti della biblioteca della tua città.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto; gli oggetti che ne fanno parte si chiamano *elementi* e si indicano in forma generale con le lettere minuscole.

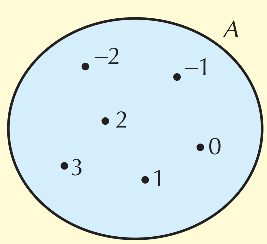
Se un insieme non ha elementi si dice che è vuoto e si scrive: $\varnothing$ oppure $\{\ \}$.

Se gli elementi di un insieme non si possono elencare tutti si dice che l'insieme è infinito.

La rappresentazione di un insieme

Consideriamo l'insieme A dei numeri interi compresi tra -2 e 3, estremi inclusi; possiamo rappresentare questo insieme:

- per elencazione, scrivendo tutti i suoi elementi: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- mediante un diagramma di Eulero-Venn:



- mediante la proprietà caratteristica indicando anche l'eventuale *insieme ambiente* da cui provengono i suoi elementi:

$$A = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

  In questo caso l'insieme ambiente è l'insieme Z dei numeri interi.

Fai gli esercizi

1 Indica quali delle seguenti proposizioni individua un insieme:
a. i numeri naturali divisori di 16
b. i computer del laboratorio di informatica della tua scuola
c. le poesie più belle che si studiano a scuola
d. gli studenti presenti a scuola il 25 Dicembre
e. gli amici più in gamba che hai
f. i medicinali prodotti da una particolare casa farmaceutica. **[a., b., d., f.]**

2 Rappresenta gli insiemi che seguono nelle tre modalità possibili.
a. I numeri naturali minori di 7.
b. Le lettere della parola "cassapanca".
c. I punti cardinali.
d. Gli insegnanti della tua classe.

3 L'insieme A dei numeri interi maggiori di 5 è un insieme infinito; non essendo possibile fare un elenco completo dei suoi elementi, il modo migliore di rappresentarlo è quello di usare la proprietà caratteristica:

$$A = \{x \in Z \mid x > 5\}$$

Rappresenta gli insiemi che seguono scegliendo le modalità che ritieni più adatte a seconda delle caratteristiche dell'insieme stesso.
a. I numeri naturali maggiori di 100.
b. I numeri interi compresi fra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$.
c. Le frazioni comprese fra 1 e 2.
d. Le lettere della parola "babbo".

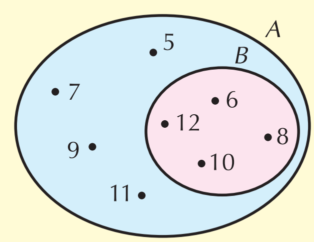
4 Sono dati gli insiemi $A = \{x \mid x$ è una vocale della parola *ciglia*$\}$ e $B = \{x \mid x$ è una vocale della parola *fila*$\}$; rappresentali per elencazione e con un diagramma di Eulero-Venn. Che cosa puoi dire di questi insiemi? $[A = B]$

5 Dati gli insiemi $A = \{1, 3, 9\}$ e $B = \{x \in N \mid x$ è divisore di $9\}$ stabilisci se è $A \neq B$ oppure $A = B$.

Rivedi la teoria

I sottoinsiemi di un insieme

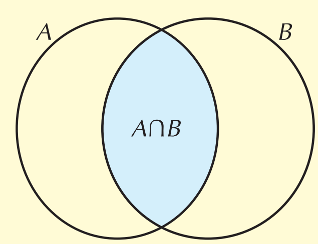
Se prendiamo alcuni elementi di un insieme A e con essi formiamo un altro insieme B, diciamo che B è sottoinsieme di A e scriviamo $B \subset A$, dove il simbolo $\subset$ si legge "è contenuto".
Per esempio, se dell'insieme $A = \{x \in N \mid 5 \leq x \leq 12\}$ consideriamo solo i numeri che sono pari, abbiamo formato l'insieme $B = \{6, 8, 10, 12\}$ che è un sottoinsieme di A. La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn illustra con chiarezza il significato di questo concetto.
In particolare si parla di *sottoinsieme proprio* quando B è formato da alcuni elementi di A ma non da tutti, come nel precedente esempio. Ogni insieme A ha poi due *sottoinsiemi impropri*: l'insieme A stesso e l'insieme $\emptyset$.



Le operazioni con gli insiemi

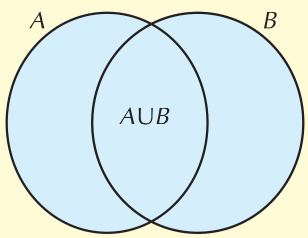
Con gli elementi di due insiemi A e B se ne possono costruire altri:

- se andiamo a scegliere gli elementi che stanno sia in A che in B, cioè gli elementi che appartengono contemporaneamente ai due insiemi, abbiamo costruito un insieme C che è l'*intersezione* fra A e B :
  $C = A \cap B$



- se prendiamo tutti gli elementi che stanno in A e aggiungiamo tutti quelli che stanno in B, prendendo una volta sola quelli che sono in comune, abbiamo costruito un insieme D che è l'*unione* fra A e B:

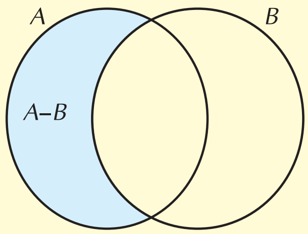
  $D = A \cup B$



- se prendiamo gli elementi di A ed eliminiamo quelli che stanno anche in B abbiamo costruito un insieme E che è la *differenza* fra A e B:

  $E = A - B$

  In particolare, se B è un sottoinsieme di A, l'insieme differenza rappresenta il *complementare* di B rispetto ad A.

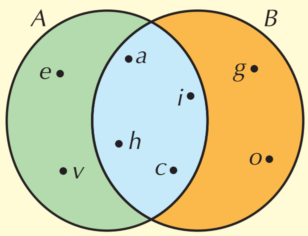


Per esempio, se $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola *chiave*$\}$, cioè $A = \{a, c, e, h, i, v\}$, e $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola *ghiaccio*$\}$, cioè $B = \{a, c, g, h, i, o\}$, abbiamo che:

$A \cap B = \{a, c, h, i\}$ $\qquad$ $A \cup B = \{a, c, e, g, h, i, o, v\}$

$A - B = \{e, v\}$ $\qquad$ $B - A = \{g, o\}$

Come si nota in questo esempio, il diagramma di Eulero-Venn evidenzia subito quali sono gli elementi dell'unione, dell'intersezione e della differenza.

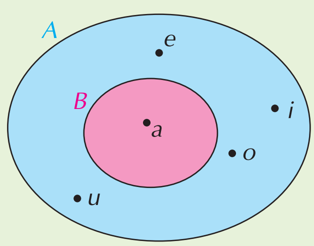


Fai gli esercizi

6 **ESERCIZIO GUIDA**

Siano $A = \{x \mid x$ è una vocale$\}$ e $B = \{x \mid x$ è una vocale della parola *mamma*$\}$. Che relazione si può stabilire fra i due insiemi?

Dalla rappresentazione mediante un diagramma di Eulero-Venn puoi subito dedurre che B è un sottoinsieme proprio di A e quindi scrivere che ....



7 Siano $A = \{x \mid x$ è una vocale$\}$ e $B = \{x \mid x$ è una vocale della parola *aiuole*$\}$. Che relazione si può stabilire fra i due insiemi? [$A = B$]

8 Date le seguenti coppie di insiemi, stabilisci quale dei due è sottoinsieme dell'altro, aiutandoti eventualmente con un diagramma di Eulero-Venn:

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{1, 3\}$

b. $C = \{a, b, c, d, e\}$ $\qquad$ $D = \{a, e\}$

c. $E = \{x \mid x$ è una città della Spagna$\}$ $\qquad$ $F = \{x \mid x$ è una città d'Europa$\}$

d. $G = \{x \mid x$ è una squadra di calcio italiana$\}$ $\qquad$ $H = \{x \mid x$ è una squadra di calcio italiana di serie A$\}$

[**a.** $B \subset A$; **b.** $D \subset C$; **c.** $E \subset F$; **d.** $H \subset G$]

9 Considera le seguenti coppie di insiemi e stabilisci quando B è sottoinsieme di A e se si tratta di un sottoinsieme proprio o improprio:

a. $A = \{x \in Z \mid -4 < x < 0\}$ $B = \{-3, -2, -1\}$ [$B = A$, improprio]

b. $A = \{x \in N \mid x$ è divisore di $20\}$ $B = \{x \in N \mid x$ è un numero primo minore di $20\}$

c. $A = \{x \mid x$ è un giorno della settimana$\}$ $B = \{x \mid x$ è un giorno della settimana che inizia per $t\}$ [$B = \varnothing$, improprio]

d. $A = \{x \in N \mid x$ è un numero pari minore di $20\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ [$B \subset A$, proprio]

e. $A = \{x \in N \mid x$ è un numero dispari minore di $10\}$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ [$B = A$, improprio]

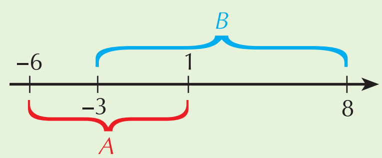
f. $A = \{x \in Z \mid -5 < x < 7\}$ $B = \{x \in Z \mid -3 < x < 4\}$ [$B \subset A$, proprio]

g. $A = \{x \in Z \mid -7 < x < 1\}$ $B = \{x \in Z \mid -3 < x < 0\}$ [$B \subset A$, proprio]

10 **ESERCIZIO GUIDA**

Siano $A = \{x \in Z \mid -6 \le x < 2\}$ e $B = \{x \in Z \mid -3 \le x \le 8\}$; troviamo $A \cap B$.

Rappresentiamo i due insiemi su una retta



Quindi: $A \cap B = \{x \in Z \mid -3 \le x \le 1\}$.

11 Trova l'intersezione fra gli insiemi $A = \{x \in N \mid x$ è un numero pari minore di $20\}$ e $B = \{x \in N \mid x$ è un numero dispari minore di $15\}$; che tipo di insieme hai ottenuto? [$\varnothing$]

12 Determina l'intersezione delle seguenti coppie di insiemi:

a. $A = \{0, 2, 6, 11, 13\}$ $B = \{-4, 6, 10, 15\}$ [$\{6\}$]

b. $A = \{x \in N \mid 7 < x < 12\}$ $B = \{x \in N \mid 9 < x < 15\}$ [$\{10; 11\}$]

c. $A = \{x \in N \mid 16 < x < 125\}$ $B = \{x \in N \mid 54 < x < 315\}$ [$\{x \in N \mid 54 < x < 125\}$]

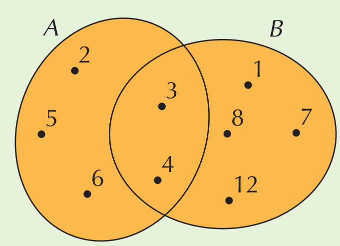
d. $A = \{x \in N \mid x < 100\}$ $B = \{x \in N \mid 4 < x < 50\}$ [B]

13 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati gli insiemi $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 4, 7, 8, 12\}$, vogliamo calcolare la loro unione.

Dobbiamo prendere tutti gli elementi di A e tutti gli elementi di B senza ripetere quelli comuni; quindi:

$$A \cup B = \{\underbrace{2, 3, 4, 5, 6}_{\text{elementi di } A}, \underbrace{1, 7, 8, 12}_{\text{elementi di } B \text{ senza la ripetizione di 3 e 4}}\}$$



14 Dopo aver stabilito che relazione c'è fra gli insiemi $A = \{-1, 4, 8\}$ e $B = \{-1, 3, 4, 5, 8, 10\}$, determina la loro unione. [B]

15 Determina l'unione fra le seguenti coppie di insiemi:

a. $A = \{x \in N \mid 7 < x < 12\}$ $B = \{x \in N \mid 2 < x < 10\}$ [$\{x \in N \mid 2 < x < 12\}$]

b. $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola "massaia"$\}$ $B = \{x \mid x$ è una vocale della parola "mamma"$\}$ [$A = \{a, i, m, s\}$]

c. $A = \{x \mid x$ un numero pari minore di $12\}$ $B = \{x \in N \mid x < 10\}$ [$\{x \in N \mid x \le 10\}$]

d. $A = \{x \in N \mid x$ è la metà di $5\}$ $B = \{2, 4, 5, 8, 10\}$ [B]

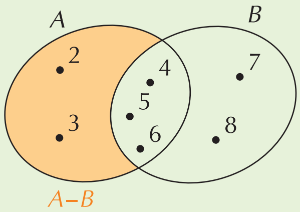
16 Siano $A = \{x \in N \mid 3 < x \leq 10\}$ e $B = \{x \in N \mid 5 \leq x < 15\}$; dopo aver rappresentato i due insiemi per elencazione e mediante un diagramma di Venn, calcola $A \cup B$ e $A \cap B$ dando la rappresentazione di questi due insiemi sia per elencazione che mediante la proprietà caratteristica.
[$A \cup B = \{x \in N \mid 3 < x < 15\}$, $A \cap B = \{x \in N \mid 5 \leq x \leq 10\}$]

17 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x < 10\}$, $B = \{x \in N \mid x < 10 \wedge x \text{ è pari}\}$, $C = \{x \in N \mid 5 < x < 15\}$, calcola $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cup (B \cap C)$. [$A \cap C = \{x \in N \mid 6 \leq x \leq 9\}$; $A \cup B = A$; $A \cup (B \cap C) = A$]

18 **ESERCIZIO GUIDA**

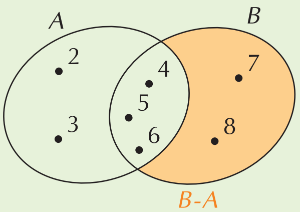
Considerati gli insiemi $A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in N \mid 4 \leq x \leq 8\}$, calcoliamo $A - B$ e $B - A$.

Per calcolare $A - B$ dobbiamo prendere gli elementi di A che non stanno anche in B, quindi $A - B = \{2, 3\}$.



Per calcolare $B - A$ dobbiamo prendere gli elementi di B che non stanno anche in A, quindi $B - A = \{7, 8\}$.

Poiché abbiamo trovato due insiemi diversi, possiamo concludere che la differenza fra insiemi non è commutativa.



19 Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \text{ è un numero pari minore di } 7\}$ e $B = \{x \in N \mid 7 < x \leq 13\}$, calcoliamo $A - B$ e $B - A$. [$A - B = A$; $B - A = B$]

20 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \text{ è un numero pari minore di } 5\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, calcola $B - A$.

A è un sottoinsieme proprio di B, quindi ....
In questo caso particolare, l'insieme $B - A$ si dice anche **complementare di *A* rispetto a *B*** e si indica solitamente con il simbolo $\overline{A}_B$ oppure $\mathscr{C}_B\, A$.

21 Determina gli insiemi $A - B$ e $B - A$ nei seguenti casi:

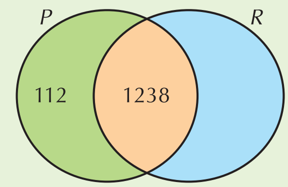
a. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ [$A - B = \{2\}$, $B - A = \{5, 7\}$]
b. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$ [$A - B = A$, $B - A = B$]
c. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ [$A - B = \emptyset$, $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$]

In quale di questi casi puoi parlare di insieme complementare? [**c.**]

22 **ESERCIZIO GUIDA**

Da un'indagine sul consumo alimentare condotta su un campione di 1536 persone tutte hanno dichiarato di mangiare pasta oppure riso; di queste, 1238 mangiano sia la pasta che il riso. Se 112 persone hanno dichiarato di mangiare pasta ma mai riso, quante non mangiano mai pasta e quante complessivamente mangiano riso?

Rappresentiamo la situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn. Indichiamo con P l'insieme delle persone che mangiano pasta e con R quello delle persone che mangiano riso; poiché ci sono persone che mangiano sia pasta che riso, i due insiemi si intersecano ed il numero di elementi dell'intersezione è 1238; inoltre 112 è il numero di persone che appartengono a $P - R$ (persone che mangiano pasta ma non riso).



Di conseguenza, le persone che appartengono all'insieme $R - P$ sono $1536 - (1238 + 112) = 186$.
Possiamo adesso rispondere alle domande:

- non mangiano mai pasta 186 persone
- mangiano riso complessivamente $1238 + 186 = 1424$ persone.

23 In un gruppo di 40 ragazzi, 12 hanno la patente solo per la moto, 15 solo per l'auto e 25 complessivamente hanno la patente per l'auto. Quanti ragazzi hanno la patente sia per la moto che per l'auto e quanti non hanno nessun tipo di patente? [10; 3]

Rivedi la teoria

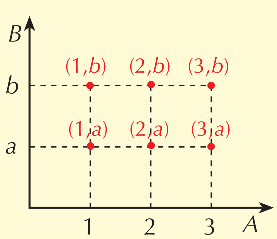
Il prodotto cartesiano

Se si accoppiano gli elementi a di un insieme A agli elementi b di un insieme B si costruisce un nuovo insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (a, b). Tale insieme è il *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con il simbolo $A \times B$. Per esempio se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, allora $A \times B$ è l'insieme:

$$\{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

Per rappresentare il prodotto cartesiano fra due insiemi si può usare:

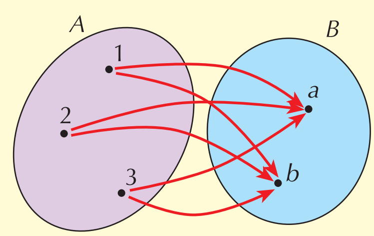
il diagramma cartesiano



la tabella a doppia entrata

A \ B	a	b
1	$(1,a)$	$(1,b)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$
3	$(3,a)$	$(3,b)$

la rappresentazione sagittale



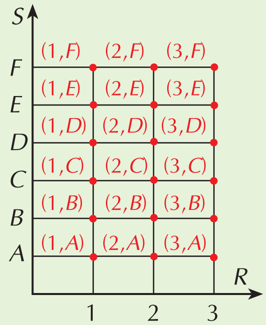
Fai gli esercizi

24 **ESERCIZIO GUIDA**

Ad una festa, la padrona di casa ha preparato tre regali da assegnare a sorte fra i 6 invitati. Ci chiediamo come possono essere distribuiti i regali fra i convenuti.

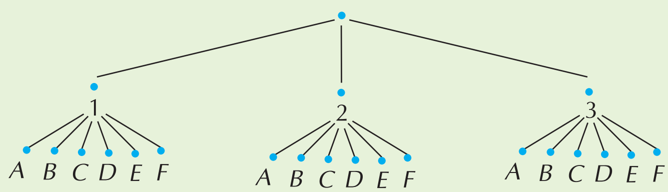
Indichiamo con 1, 2, 3 i regali preparati e con A, B, C, D, E, F gli invitati, abbiamo cioè gli insiemi $R = \{1, 2, 3\}$ e $S = \{A, B, C, D, E, F\}$. Abbiamo visto che problemi di questo tipo si risolvono considerando il **prodotto cartesiano** fra i due insiemi, cioè l'insieme delle coppie ordinate che si ottengono abbinando ogni elemento del primo insieme con ogni elemento del secondo. Nel nostro caso dobbiamo calcolare $R \times S$.

Le modalità più usate per rappresentare il prodotto cartesiano sono il diagramma cartesiano e la tabella a doppia entrata, che in questo caso sono le seguenti:



R \ R	A	B	C	D	E	F
1	(1,A)	(1,B)	(1,C)	(1,D)	(1,E)	(1,F)
2	(2,A)	(2,B)	(2,C)	(2,D)	(2,E)	(2,F)
3	(3,A)	(3,B)	(3,C)	(3,D)	(3,E)	(3,F)

Non è consigliabile invece usare la rappresentazione sagittale che risulterebbe confusa; in alternativa si può invece costruire un albero che, con i possibili percorsi, individui le coppie.



25 Tre naufraghi sbarcano su un'isola deserta e trovano una palma con 3 noci di cocco: una piccola, una media e una un po' più grande. Sapendo che nessuno di loro si impadronisce di tutte e tre le noci, in quanti modi se le possono distribuire?

26 Esegui il prodotto cartesiano $A \times B$ dei seguenti insiemi e rappresentalo nei modi che ritieni più opportuni.

a. $A = \{\text{Paola, Marta}\}$ $\quad B = \{\text{Mario, Lorenzo, Carlo}\}$

b. $A = \{a, b, c\}$ $\quad B = \{x, y, w, j\}$

c. $A = \{x \in N \mid x \leq 3\}$ $\quad B = \{x \in Z \mid -2 < x < 1\}$

Rivedi la teoria

Le funzioni

Tra gli elementi di un insieme A e gli elementi di un insieme B si può stabilire una corrispondenza f che ad ogni elemento di A associ uno e un solo elemento di B; questa corrispondenza prende il nome di **funzione**.

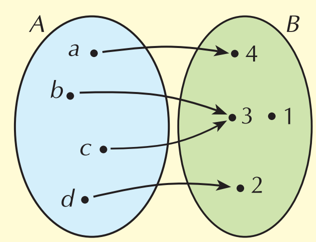
Affinché si possa parlare di funzione *deve quindi accadere che*:

- tutti gli elementi di A, nessuno escluso, abbiano una immagine in B;
- ogni elemento di A abbia una sola immagine in B.

Non deve invece accadere che:

- ci siano elementi di A che non hanno immagini in B;
- ci siano elementi di A che hanno più di una immagine in B.

Di una relazione che è una funzione si dice anche che è una *corrispondenza univoca*.



L'elemento y di B che è associato all'elemento x di A si chiama **immagine** di x; ogni x ha quindi una sola immagine. Dell'elemento x a cui è associato y si dice poi che è la **controimmagine** di y; l'elemento y può avere una o più controimmagini.

Riferendoci alla figura precedente, possiamo dire per esempio che:

- 4 è l'immagine di a e 4 ha una sola controimmagine che è l'elemento a
- 3 è l'immagine sia di b che di c; l'elemento 3 ha quindi due controimmagini che sono gli elementi b e c.

L'insieme delle controimmagini, che in generale coincide con l'insieme A, prende il nome di **dominio** della funzione; l'insieme delle immagini, che è un sottoinsieme di B, prende il nome di **codominio** della funzione.
Per indicare che f è una funzione dall'insieme A verso l'insieme B scriviamo: $A \xrightarrow{f} B$

Esempi di funzioni si trovano più frequentemente di quanto si possa pensare; aprendo un giornale troviamo:

- la corrispondenza fra le capitali europee e le temperature rilevate in un particolare giorno:

Londra	Parigi	Mosca	Belgrado	Atene	Roma	Madrid
-4	-2	-8	0	$+6$	-1	$+4$

- la corrispondenza fra i giorni della settimana e le quotazioni del Dollaro nei confronti dell'Euro:

lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì
1,31	1,32	1,29	1,33	1,35

e numerosi altri esempi ancora.

Le funzioni fra insiemi numerici

Una funzione può essere espressa da una relazione di tipo algebrico fra le variabili x e y quando gli insiemi A e B sono di tipo numerico. Per esempio:

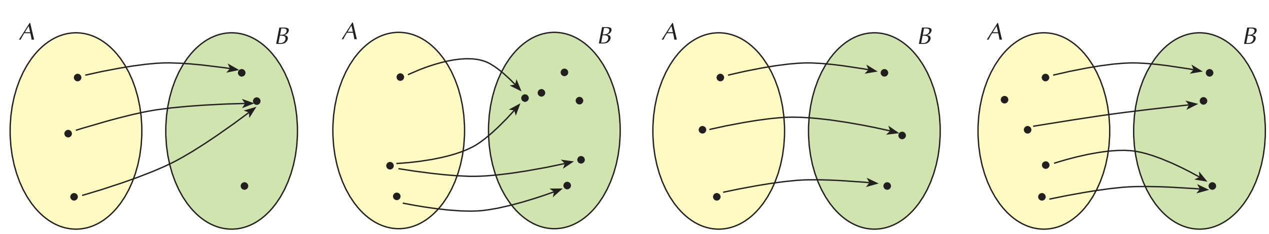
- $y = 3x - 1$ esprime la funzione che ad ogni numero x associa il numero $3x - 1$

  ed è $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ $\qquad f(-3) = 3 \cdot (-3) - 1 = -10$ $\qquad f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$
- $y = x^2 - 4$ esprime la funzione che ad ogni numero x associa il numero $x^2 - 4$

  ed è $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{15}{4}$ $\qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4}$

Fai gli esercizi

27 Stabilisci quali, fra le relazioni che hanno i seguenti grafici, rappresentano delle funzioni:



a. **b.** **c.** **d.** **[a., c.]**

28 Indica quali fra le seguenti relazioni sono funzioni

a. «x è il successivo di y» con $x, y \in N$

b. «x è il quadrato di y» con $x, y \in R$
c. «x è il cubo di y» con $x, y \in R$
d. «x è il libro di matematica di y» con $x \in \{\text{libri}\}$ e $y \in \{\text{studenti}\}$. [**a.**, **c.**, **d.**]

29 Data la funzione $y = \dfrac{x+1}{x}$ calcola **a.** $f(1)$, **b.** $f(-2)$, **c.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, **d.** $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

$\left[\mathbf{a}.\ 2;\ \mathbf{b}.\ \dfrac{1}{2}\ \mathbf{c}.\ 3;\ \mathbf{d}.\ -2\right]$

30 Considerate le funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calcola il valore delle seguenti espressioni:

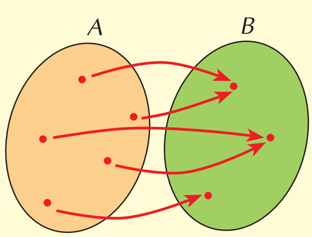
a. $f(1) - f(2) + g\left(\dfrac{1}{3}\right)$ **b.** $\dfrac{g(2) + f(-1)}{f(0) + g\left(\dfrac{-1}{3}\right)}$ **c.** $\dfrac{g(1) - g(-2) + f(3)}{[f(-2) + g(-1)]^2}$ $\left[\mathbf{a.}\ 0;\ \mathbf{b.}\ -\dfrac{1}{8};\ \mathbf{c.}\ \dfrac{19}{8}\right]$

Rivedi la teoria

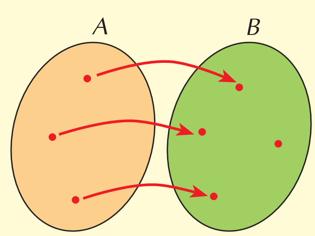
La classificazione delle funzioni

Sia f una funzione da A verso B; se rivolgiamo la nostra attenzione a quello che accade in B, diciamo che f è una funzione:

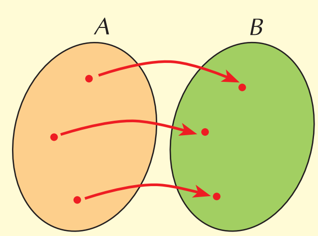
- **suriettiva** se l'insieme delle immagini coincide con B; in altre parole se il codominio coincide con B
- **iniettiva** se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B; in altre parole se gli elementi di B hanno al massimo una sola controimmagine in A (quindi possono non averne, averne una, ma non averne due o più di due)
- **biiettiva** se è contemporaneamente suriettiva e iniettiva, in altre parole se ogni elemento di B ha una sola controimmagine in A.
  Di una funzione biiettiva si dice che è una **corrispondenza biunivoca**.



funzione suriettiva



funzione iniettiva

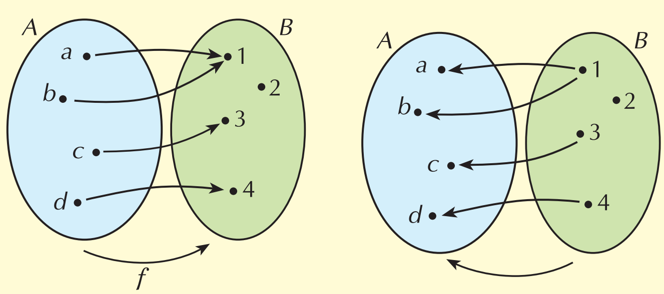


funzione biiettiva

La funzione inversa

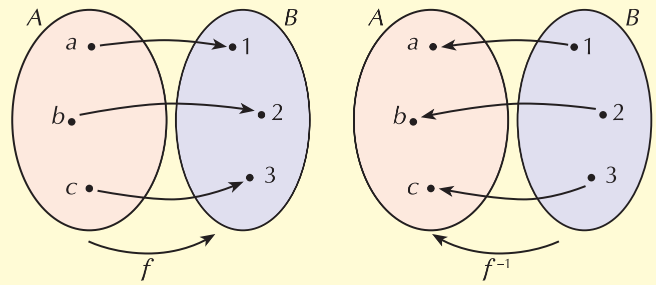
Consideriamo una funzione f da A verso B e invertiamo la corrispondenza, quindi B diventa l'insieme di partenza e A quello di arrivo. In generale la corrispondenza inversa non è una funzione, basta osservare la figura che segue per rendersene conto (osserva la figura di destra):

- l'elemento 1 ha due immagini
- l'elemento 2 non ha immagini



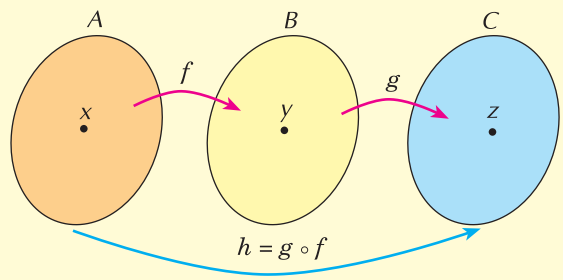
Ci sono però situazioni in cui anche la corrispondenza inversa è una funzione, come nel caso rappresentato dalla figura a lato.

Diciamo allora che la funzione f **è invertibile** e indichiamo con il simbolo f^{-1} la sua inversa.
Di una funzione invertibile si dice che è una corrispondenza biunivoca.



Il prodotto di funzioni

Nella figura a lato la funzione f ha come dominio l'insieme A e codominio l'insieme B; la funzione g ha come dominio l'insieme B e codominio l'insieme C. Tramite queste due funzioni si può costruire la corrispondenza h che agli elementi di A associa direttamente gli elementi di C; anche questa corrispondenza è una funzione e diciamo che h è il **prodotto delle due funzioni f e g.**



In sostanza, agli elementi y che sono immagini degli elementi x tramite la funzione f viene applicata la funzione g che fa ottenere gli elementi z. Scriviamo allora che

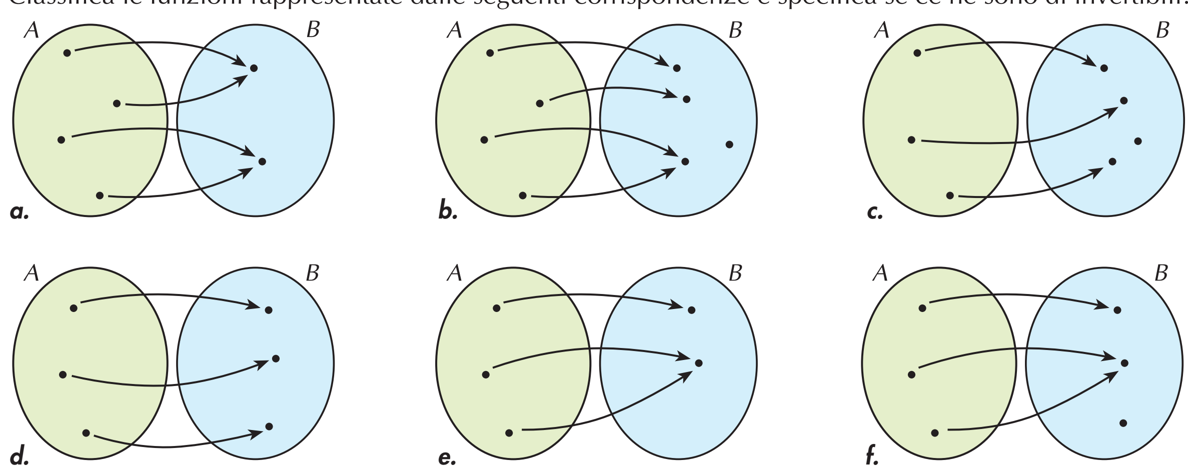
$$h = g \circ f$$

intendendo che g viene applicata agli elementi prodotti dalla f; nell'indicazione di un prodotto le funzioni vengono applicate in ordine inverso rispetto a come sono scritte.
Per esempio, se f è la funzione $y = x - 1$ e g è la funzione $z = 3y - 4$, allora la funzione h è quella che associa a ogni elemento x il corrispondente elemento z; la sua espressione si ottiene sostituendo $x - 1$ a y nell'espressione di z :

$$z = 3(x - 1) - 4$$

Fai gli esercizi

31 Classifica le funzioni rappresentate dalle seguenti corrispondenze e specifica se ce ne sono di invertibili:



[suriettive: **a.**, **e**; iniettive: **c.**; biiettive: **d.**; nessuna caratteristica: **b.**, **f.**; invertibile solo la **d.**]

32 Stabilisci quali tra le funzioni che seguono sono invertibili:

a. la corrispondenza tra N e l'insieme dei numeri pari che ad ogni numero naturale associa il suo doppio

b. la corrispondenza di Z in Z che ad ogni numero intero associa il successivo

c. la corrispondenza di N in N che ad ogni numero naturale associa il suo quadrato

d. la corrispondenza che ad ogni studente associa la scuola frequentata

e. la corrispondenza che ad ogni mese dell'anno associa un numero progressivo nell'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 12 o ad essi uguali. [**a.**, **b.**, **e.**]

33 Date le funzioni f e g indicate di seguito, costruisci la funzione $h = g \circ f$.

a. $f : x \to x - 3$ $\quad g : x \to x - 1$

b. $f : x \to x^2$ $\quad g : x \to x - 1$

c. $f : x \to x^3 - 2$ $\quad g : x \to 2x$

d. $f : x \to \frac{1}{2}x$ $\quad g : x \to x - 4$

$\left[\textbf{a. } x \to x - 4;\ \textbf{b. } x \to x^2 - 1;\ \textbf{c. } 2(x^3 - 2);\ \textbf{d. } \frac{1}{2}x - 4\right]$

Cap 2. Gli insiemi N e Z

Rivedi la teoria

Le caratteristiche dell'insieme *N*

Nell'insieme N dei numeri naturali si possono sempre eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, ma non sempre è possibile eseguire la sottrazione o la divisione.
La differenza $a - b$ si può calcolare solo se $a \geq b$; il quoziente $a : b$ si può calcolare solo se a è multiplo di b, cioè se esiste un numero c tale che $b \cdot c = a$.
Nell'insieme N hanno particolare importanza i **numeri primi**, cioè quei numeri maggiori di 1 che hanno come divisori solo se stessi e l'unità; la successione dei numeri primi è illimitata ed ha come primi termini i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
Ad oggi non è conosciuta una regola che possa generare tutti i numeri primi.
Scomporre un numero naturale in fattori primi significa scriverlo come prodotto di numeri tutti primi. Per esempio, la scomposizione di:

- 325 è $5^2 \cdot 13$
- 504 è $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Il *M.C.D.* fra due o più numeri naturali è il più grande fra i divisori comuni; il *m.c.m.* è il più piccolo fra i multipli comuni. Quando i numeri sono scomposti in fattori primi, è facile calcolare *M.C.D.* e *m.c.m.* applicando le seguenti regole:

- il *M.C.D.* è il prodotto dei soli fattori comuni presi una sola volta con il minimo esponente
- il *m.c.m.* è il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con il massimo esponente.

Per esempio, considerati i numeri 90, 24, 36 si ha che:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

quindi $M.C.D.(90, 24, 36) = 2 \cdot 3 = 6$ $\qquad m.c.m.(90, 24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Il M.C.D. tra due numeri a e b si può calcolare anche usando l'**algoritmo di Euclide**; indicando con r il resto della divisione intera $a : b$ si ha che:

se $r \neq 0$ $\quad$ M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, r)

se $r = 0$ $\quad$ M.C.D. $(a, b) = b$

Per esempio M.C.D. (12, 8) = M.C.D. (8, 4) perché il resto di 12 : 8 è 4
$= 4$ perché il resto di 8 : 4 è 0

Le caratteristiche dell'insieme *Z*

L'insieme Z dei numeri interi ha per elementi ...... $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$ .....

Numeri come $+5$ e -8 sono **discordi**, mentre numeri come -3 e -9 oppure $+2$ e $+14$ sono **concordi**; inoltre numeri come -7 e $+7$ si dicono **opposti**. La scrittura $|+5|$ indica il **modulo** del numero $+5$ e sappiamo che il modulo di un numero è il numero stesso considerato senza segno.
Per eseguire le operazioni fondamentali in Z si devono applicare le seguenti regole:

- **addizione:**
  - se i numeri sono concordi si sommano i valori assoluti e si attribuisce al risultato lo stesso segno dei due addendi: $(-3)+(-5)=-8$ $\quad$ $(+7)+(+2)=+9$
  - se i numeri sono discordi si calcola la differenza fra i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno del numero che ha valore assoluto maggiore: $(-6)+(+9)=+3$ $\quad$ $(+5)+(-12)=-7$
- **sottrazione:**
  si trasforma in una addizione sommando il primo numero con l'opposto del secondo:
  $(+4)-(-7)=(+4)+(+7)=+11$ $\quad$ $(+2)-(+9)=(+2)+(-9)=-7$
- **moltiplicazione:**
  si calcola il prodotto dei valori assoluti e si attribuisce al risultato segno positivo se i due numeri sono concordi, segno negativo se i due numeri sono discordi:
  $(-4)\cdot(+5)=-20$ $\quad$ $(+3)\cdot(+7)=+21$ $\quad$ $(-2)\cdot(-8)=+16$

La divisione non è invece un'operazione interna a Z.

Fai gli esercizi

Inserisci al posto dei puntini il numero naturale mancante.

1 $12+....=17$ $\quad$ $15+....=58$ $\quad$ $....+16=32$ $\quad$ $....+15=28$

2 $....-12=37$ $\quad$ $....-18=29$ $\quad$ $73-...=36$ $\quad$ $16-....=3$

3 $11\cdot....=132$ $\quad$ $16\cdot....=64$ $\quad$ $....\cdot 8=136$ $\quad$ $....\cdot 9=108$

4 $96:....=8$ $\quad$ $210:....=14$ $\quad$ $....:7=62$ $\quad$ $....:12=5$

5 Scomponi in fattori i seguenti numeri: 648 $\quad$ 1960 $\quad$ 624 $\quad$ 3312 $\quad$ 4500

6 Calcola il *M.C.D.* e il *m.c.m.* fra i seguenti gruppi di numeri:
a. 21, 14, 42 $\quad$ **b.** 2352, 729, 63 $\quad$ **c.** 75, 225, 625 $\quad$ **d.** 288, 144, 108
[**a.** 7; 42; **b.** 3; 571536; **c.** 25; 5625; **d.** 36; 864]

7 Calcola il M.C.D. tra le seguenti coppie di numeri applicando l'algoritmo di Euclide:
a. 27, 36 $\quad$ **b.** 72, 64 $\quad$ **c.** 70, 84 $\quad$ **d.** 25, 40

8 Esegui le seguenti operazioni fra numeri interi:
a. $(+4)+(-5)-(+8)$ $\quad$ **b.** $(-3)+(-7)-(-3)+(+12)$
c. $(+2-1)+[-3\cdot(+2-7)+4]-(-3+1)$ $\quad$ **d.** $\{-(3+4)-[2+7-(8-9)]\}\cdot[4-(3+5)]$
[**a.** -9; **b.** $+5$; **c.** $+22$; **d.** $+68$]

9 Semplifica le seguenti espressioni:
a. $(1+3-2)-\{4+[8-(5-4\cdot 2)\cdot(-3)]+1-(-2)\cdot(+7)\}$ $\quad$ $[-16]$
b. $5-\{3\cdot(-4)+[-2-3\cdot(-6)]-1+4\cdot(+3)\}-3\cdot(6-4-8)$ $\quad$ $[+8]$
c. $\{-[6+2-4\cdot(-2)]+[(-2)\cdot(-4)+5]+1\}\cdot(-2)-[4\cdot(-1)+(-6)\cdot(-5)]$ $\quad$ $[-22]$

Rivedi la teoria

Le potenze

La scrittura a^n con $n \in N$ esprime il prodotto di n fattori uguali ad a. Di conseguenza:

- se $a > 0$ la potenza a^n è sempre positiva
- se $a < 0$ la potenza a^n è: positiva se n è pari; negativa se n è dispari

Si pone poi $a^1 = a$ e $a^0 = 1$ se $a \neq 0$. Non si attribuisce significato alla scrittura 0^0.

Per esempio:

- $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$

Le proprietà delle potenze

Le potenze godono di alcune proprietà. Se a è un numero intero qualsiasi e n e m sono due numeri naturali (senza che si verifichi la situazione in cui a, m e n sono tutti uguali a zero), si ha che:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ prodotto di potenze con la stessa base, si sommano gli esponenti
- $a^n : a^m = a^{n-m}$ quoziente di potenze con la stessa base, si sottraggono gli esponenti
- $(a^n)^m = a^{nm}$ potenza di potenza, si moltiplicano gli esponenti

Inoltre, se b è un secondo numero sul quale facciamo le stesse ipotesi fatte su a:

- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$

Ad esempio:

- $4^3 \cdot 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$
- $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$
- $8^2 : 4^2 = (8 : 4)^2 = 2^2$
- $(+7)^5 : (+7)^3 = (+7)^{5-3} = (+7)^2$
- $(-3)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (-4)]^2 = (+12)^2$
- $\left[(-2)^4 \cdot (+3)^4\right]^2 = \left\{[(-2) \cdot (+3)]^4\right\}^2 = (-6)^8$

Attenzione agli errori: $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$; ad esempio $3^2 + 5^2 \neq (3+5)^2$.

Fai gli esercizi

10 Completa, se è possibile, le seguenti uguaglianze in modo che risultino vere.

a. $3^{\dots} = 81$ **b.** $5^{\dots} = 1$ **c.** $7^{\dots} = 14$ **d.** $\dots^4 = 1$

e. $(+4)^{\dots} = +8$ **f.** $(-2)^{\dots} = 1$ **g.** $(-2)^{\dots} = +32$ **h.** $(-7)^{\dots} = -7$

11 Calcola, applicando le proprietà delle potenze:

a. $3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^8$ **b.** $3^4 : 3^3$ **c.** $(3^4 \cdot 3^5) : 3$ **d.** $(5^2)^3 : (5^2)^2$

e. $(3^2 \cdot 5^2) : 15$ **f.** $30^4 : 6^4$ **g.** $(3^7 \cdot 3^3) : 3^5$ **h.** $3^2 \cdot 3^5 : 3^7$

[**a.** 3^{19}; **b.** 3; **c.** 3^8; **d.** 5^2; **e.** 15; **f.** 5^4; **g.** 3^5; **h.** 1]

12 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o sono false correggendo quelle errate:

a. $2^3 + 4^3 = 6^3$ V F

b. $2^4 + 2^5 = 2^9$ V F

c. $16^5 : 2^5 = 8^5$ V F

d. $(5^3)^2 : 5^6 = 0$ V F

e. $(2^3)^2 = 2^9$ V F

f. $2^3 \cdot 4^3 = 8^3$ V F

g. $3^6 : 3^3 = 3^{6:3} = 3^2$ V F

h. $5^2 - 3^2 = 2^2$ V F

i. $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$ V F

l. $5^4 \cdot 5^0 = 1$ V F

m. $18^4 : 9^4 = 2^4$ V F

[**a.** F; **b.** F; **c.** V; **d.** F; **e.** F; **f.** V; **g.** F; **h.** F; **i.** F; **l.** F; **m.** V]

13 Calcola i valori delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze dovunque è possibile:

a. $(-2)^5 \cdot (-2)^3 : (-2)^4$ [16]

b. $(-4)^4 : (+4)^3 \cdot (+4)^6$ [4^7]

c. $(+18)^2 : (-2)^2 \cdot \left[(-9)^2\right]^2$ [9^6]

d. $\left[(-6)^2\right]^0 \cdot \left[(-6)^4\right]^5 : (-6)^{12}$ $\left[(-6)^8\right]$

e. $\left[(-2)^5 : (-2)^4\right]^5 : \left[(-2)^2 \cdot (-2)^3\right]$ [1]

f. $\left\{\left[(-3)^2\right]^5\right\}^2 : \left\{\left[(-3)^3\right]^4\right\}^0$ $\left[(-3)^{20}\right]$

g. $\left\{\left[(-5)^3 \cdot (-5)^0\right] \cdot \left[-5 \cdot (-5)^4\right]\right\}^2 : \left[(-5)^4\right]^2$ $\left[(-5)^8\right]$

Cap 3. Gli insiemi Q e R

Rivedi la teoria

Le caratteristiche dell'insieme Q

La frazione $\frac{a}{b}$ rappresenta il quoziente fra i numeri a e b.

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono equivalenti se $a \cdot d = b \cdot c$.

Le frazioni equivalenti fra loro rappresentano lo stesso numero che viene detto **numero razionale**.
I numeri razionali sono dunque quei numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione o di numero decimale finito o periodico. Per passare da una forma all'altra si seguono queste regole:

- se il numero è dato sotto forma di frazione, si esegue la divisione del numeratore per il denominatore; ad esempio

  $\frac{27}{8} = 27 : 8 = 3{,}375$ $\qquad$ $\frac{4}{3} = 4 : 3 = 1{,}\overline{3}$

- se il numero è decimale finito si scrive il numero senza la virgola al numeratore della frazione e al denominatore si scrive 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali; si semplifica poi eventualmente la frazione ottenuta; ad esempio

$$2{,}6 = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \qquad 0{,}14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$

- se il numero è decimale periodico, al numeratore si scrive il numero senza la virgola meno la parte che viene prima del periodo, al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo; in seguito, se possibile, si semplifica la frazione ottenuta; ad esempio

$$1{,}\overline{25} = \frac{125-1}{99} = \frac{124}{99} \qquad 3{,}1\overline{5} = \frac{315-31}{90} = \frac{284}{90} = \frac{142}{45}$$

Fai gli esercizi

1 Stabilisci se le seguenti coppie di frazioni sono equivalenti:

$\frac{7}{2}$ e $\frac{21}{6}$ $\qquad$ $\frac{8}{12}$ e $\frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{9}{24}$ e $\frac{6}{8}$ $\qquad$ $\frac{4}{18}$ e $\frac{16}{72}$ $\qquad$ $\frac{1}{5}$ e $\frac{18}{45}$

2 Scrivi almeno tre frazioni equivalenti a $\frac{4}{5}$.

3 Trasforma in numeri decimali le seguenti frazioni:

$\frac{7}{8} \quad \frac{12}{13} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{11}{5} \quad \frac{23}{4} \quad \frac{16}{21}$

$[0{,}875;\ \ 0{,}\overline{923076};\ \ 0{,}\overline{5};\ \ 2{,}2;\ \ 5{,}75;\ \ 0{,}\overline{761904}]$

4 Scrivi in forma frazionaria i seguenti numeri decimali:

a. 1,35 $\quad$ 0,4 $\quad$ 0,035 $\quad$ 15,75 $\quad$ 2,0098 $\quad$ 0,0001

$\left[\frac{27}{20};\ \frac{2}{5};\ \frac{7}{200};\ \frac{63}{4};\ \frac{10049}{5000};\ \frac{1}{10000}\right]$

b. $2{,}\overline{3} \quad 0{,}3\overline{4} \quad 0{,}0\overline{2} \quad 1{,}0\overline{3} \quad 1{,}23\overline{4} \quad 0{,}2\overline{56}$

$\left[\frac{7}{3};\ \frac{31}{90};\ \frac{1}{45};\ \frac{31}{30};\ \frac{1111}{900};\ \frac{127}{495}\right]$

Rivedi la teoria

Le operazioni con i numeri razionali

Per sommare o sottrarre due frazioni si deve prima di tutto calcolare il *m.c.m.* fra i denominatori, ridurre le frazioni a tale denominatore, eseguire le operazioni indicate ed eventualmente semplificare il risultato. Per esempio:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{5}{9} \qquad m.c.m.(4,\ 6,\ 9) = 36 \qquad \frac{3\cdot 9 + 1\cdot 6 - 5\cdot 4}{36} = \frac{13}{36}$$

Per moltiplicare due frazioni si eseguono le semplificazioni (sempre un numeratore con un denominatore) e poi si moltiplicano i numeratori delle due frazioni e i loro denominatori. Per esempio:

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{21} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{15}_{3}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{21}_{3}} = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 3} = \frac{2}{9}$$

Per dividere due frazioni si esegue il prodotto della prima frazione per il reciproco della seconda. Per esempio:

$$\frac{18}{5} : \frac{12}{35} = \frac{18}{5}\cdot\frac{35}{12} = \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{12}_{2}} = \frac{21}{2}$$

La potenza

La scrittura a^n, con a numero razionale e n numero intero positivo rappresenta ancora il prodotto di n fattori uguali ad a; nella pratica poi, se il numero a è dato in forma di frazione, si elevano a potenza n sia il numeratore che il denominatore, rispettando le regole dei segni a seconda del segno della base e se n è pari o dispari. Per esempio:

$$\left(+\frac{3}{4}\right)^2 = +\frac{3^2}{4^2} = +\frac{9}{16} \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1^5}{2^5} = -\frac{1}{32} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = +\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Si pone poi ancora $a^0 = 1$ mentre non è definita l'espressione 0^0.
La potenza di un numero razionale si può definire anche quando l'esponente n è un numero intero negativo; in questo caso, si eleva alla stessa potenza positiva il reciproco della base. Per esempio:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \qquad \left(+\frac{1}{5}\right)^{-2} = (+5)^2 = +25$$

Valgono poi proprietà analoghe a quelle viste per le potenze di numeri interi.

Fai gli esercizi

5 Esegui le seguenti operazioni con i numeri razionali:

a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ **b.** $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$ **c.** $\left(-\frac{12}{5}\right) : \frac{3}{20}$

d. $\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right)$ **e.** $\left(+\frac{10}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{7}{2} - \left(-\frac{1}{7}\right)$

f. $\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{6}\right) : \frac{1}{12} + \left[\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2} + 4\right)\right] \cdot \frac{3}{4}$

$\left[\text{a. } \frac{13}{12}\text{; b. } -\frac{1}{6}\text{; c. } -16\text{; d. } \frac{3}{80}\text{; e. } -\frac{9}{14}\text{; f. } -\frac{15}{8}\right]$

6 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $\frac{5}{2} - \left(+\frac{6}{5}\right) \cdot \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) \cdot (-2) + \frac{7}{12}\right]$ $\left[-\frac{4}{5}\right]$

b. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right] - \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)\right\}$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

c. $\left\{\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{12}\right) + 1\right] : \left(+\frac{1}{9}\right) - 2\right\} : (-11) + \left[\frac{1}{6} + \frac{3}{4} : \left(-\frac{9}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{4}{5}\right]$

d. $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \left\{\left[2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot 2 - \frac{7}{10}\right\} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 - \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)$ $\left[\frac{4}{15}\right]$

7 Calcola le seguenti potenze: $\left(+\frac{5}{4}\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ $\left(+\frac{3}{8}\right)^0$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\left(+\frac{4}{7}\right)^{-2}$

8 Calcola i valori delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze dovunque è possibile:

a. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right]$

b. $\left(-\frac{4}{9}\right)^7 : \left(-\frac{4}{9}\right)^5 \cdot \left[\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right]^0$ $\left[+\frac{16}{81}\right]$

c. $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^4 : \left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 : \left\{\left[\left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\right\}^2$ $\left[+\frac{1}{4}\right]$

d. $\left\{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^6\right\}^2 : \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^8 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$ $[1]$

e. $\left\{\left[\left(+\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 : \left(+\frac{1}{5}\right)^6\right\}^2 \cdot \left[\left(+\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 : \left(+\frac{1}{5}\right)^4$ $\left[\frac{1}{25}\right]$

9 **ESERCIZIO GUIDA**

Attenzione all'uso delle proprietà delle potenze quando gli esponenti sono negativi:

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2+(-3)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

b. $\left(-\frac{1}{6}\right)^3 : \left(-\frac{1}{6}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{3-(-4)} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{3+4} = \left(-\frac{1}{6}\right)^7$

c. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

10 Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} \cdot \left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2\right\}^3$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

b. $\left(+\frac{3}{5}\right)^{-2} : \left(+\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left[\left(+\frac{3}{5}\right)^3\right]^{-1} \cdot \left\{\left[\left(+\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^2$ $\left[\left(+\frac{5}{3}\right)^5\right]$

c. $\left[-\left(+\frac{3}{7}\right)^2\right]^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^2 : \left[\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}\right]^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4$ $\left[+\frac{49}{9}\right]$

d. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left\{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\right]^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^6\right\}^2$ $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^5\right]$

11 Semplifica le seguenti espressioni applicando, dovunque è possibile, le proprietà delle potenze:

a. $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3 : \left(-\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^9\right]^2 \cdot \left\{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-8}\right\}^2$ $\left[\frac{25}{9}\right]$

b. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^2 \cdot \left[\left(-\frac{2}{9}\right)^2 : \left(-\frac{2}{9}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^4\right]^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 : \left(-\frac{1}{6}\right)$ $[0]$

c. $\left[\left(+\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^{-4}\right]^2 : \left[\left(+\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3} + \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} : \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4\right]^2 : \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$ $[-3]$

Rivedi la teoria

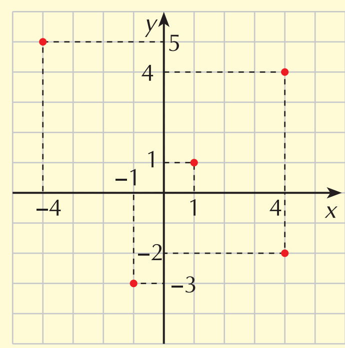
I numeri reali

Oltre ai numeri razionali ne esistono altri che hanno la caratteristica di avere un numero illimitato di cifre decimali che non si ripetono mai in successione costante; questi numeri si dicono **irrazionali**. I numeri razionali insieme agli irrazionali formano l'insieme R dei **numeri reali**.
Per poter operare con i numeri reali si rende necessario a volte usare un loro valore approssimato. Per esempio, il numero $\sqrt{2}$ calcolato con una calcolatrice a dieci cifre viene espresso da 1,414213562, ma questo è solo un valore approssimato di $\sqrt{2}$; lo stesso numero può essere approssimato anche con un numero inferiore di cifre decimali:

- 1,41 è un'approssimazione per difetto a meno di 0,01
- 1,415 è un'approssimazione per eccesso a meno di 0,001.

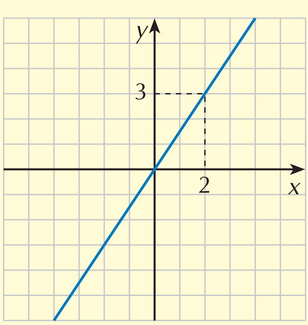
I numeri reali si possono rappresentare su una retta orientata e la corrispondenza che si viene a stabilire tra numeri reali e punti della retta è di tipo biunivoco; di conseguenza i numeri reali esauriscono l'intera retta.

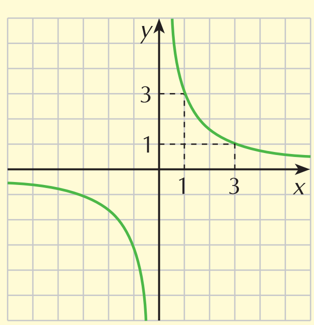
Il grafico di una funzione

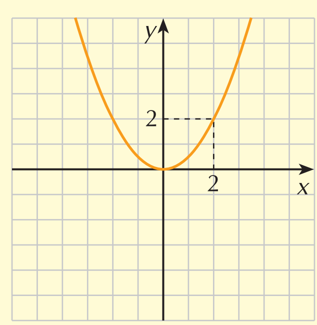


Se i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata, le coppie di numeri reali (x, y) sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano quando in esso si sono fissate due rette orientate tra loro perpendicolari.
La retta su cui si rappresenta il numero x si chiama **asse delle ascisse**, la retta su cui si rappresenta il numero y si chiama **asse delle ordinate**; il piano così individuato si chiama **piano cartesiano**.
Tracciando dal punto associato a x e dal punto associato a y le parallele ai due assi, si individua un punto P e si dice che P ha coordinate (x, y).
Si stabilisce in questo modo una corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di numeri (x, y) e i punti del piano cartesiano.
Questa corrispondenza permette di rappresentare graficamente una funzione $y = f(x)$ rappresentando l'insieme dei punti di ascissa x e di ordinata $f(x)$. In particolare

- funzioni della forma $y = kx$ rappresentano una proporzionalità diretta e hanno per grafico una retta passante per l'origine degli assi cartesiani (in figura la retta $y = \frac{3}{2}x$)
- funzioni della forma $y = \frac{k}{x}$ rappresentano una proporzionalità inversa e hanno per grafico un'iperbole equilatera (in figura l'iperbole $y = \frac{3}{x}$)
- funzioni della forma $y = kx^2$ rappresentano una propozionalità quadratica e hanno per grafico una parabola (in figura la parabola $y = \frac{1}{2}x^2$).







Fai gli esercizi

12 Trova un valore approssimato per difetto e uno per eccesso dei seguenti numeri reali a meno di 0,01 e 0,001 :

$\frac{7}{9}$ $\qquad$ $\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{5}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni riconoscendone il tipo.

13 **a.** $y = \frac{5}{2}x$ $\qquad$ **b.** $y = -2x$ $\qquad$ **c.** $y = \frac{8}{3}x$

14 **a.** $y = \frac{9}{x}$ $\qquad$ **b.** $y = -\frac{1}{x}$ $\qquad$ **c.** $y = \frac{6}{x}$

15 **a.** $y = \frac{1}{3}x^2$ $\qquad$ **b.** $y = -2x^2$ $\qquad$ **c.** $y = \frac{4}{5}x^2$

Verifica del recupero

Sugli insiemi e le funzioni

1 Stabilisci quali fra le seguenti rappresentazioni dell'insieme dei numeri interi compresi fra -3 e 7 (estremi esclusi) sono esatte:

a. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **b.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
c. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **d.** $A = \{x \in Z \mid -2 < x < 7\}$
e. $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 7\}$ **f.** $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x < 7\}$

0,25 punti

2 Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi

a. $A = \{x \in Z \mid -5 < x \leq 2\}$
b. $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola "palla"$\}$
c. $C = \{x \mid x$ è un divisore di $9\}$
d. $D = \{x \mid x$ è un mese dell'anno che ha 27 giorni$\}$

0,5 punti

3 Dato l'insieme $A = \{x \mid x$ è un divisore di $15\}$, indica se fra i seguenti insiemi vi sono sottoinsiemi di A, specificando se sono propri o impropri:

$B = \{1, 2, 3\}$ $C = \varnothing$ $D = \{3, 5\}$ $E = \{1, 3, 5, 10\}$ $F = \{1, 3, 5, 15\}$

0,5 punti

4 Sono dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x$ è un divisore pari di $20\}$ e $B = \{x \in N \mid x$ è un divisore di $10\}$:

① L'insieme $A \cup B$ è:

a. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ **b.** $\{2, 4, 5, 10\}$ **c.** $\{1, 2, 10\}$ **d.** altro

② L'insieme $A \cap B$ è:

a. $\{2, 5\}$ **b.** $\{2\}$ **c.** $\{2, 10\}$ **d.** altro

0,5 punti

5 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid 20 \leq x \leq 50\}$ e $B = \{x \in N \mid 30 < x \leq 54\}$, indica quale fra i seguenti è l'insieme $A - B$:

a. $A - B = \{x \in N \mid 20 \leq x \leq 30\}$ **b.** $A - B = \{x \in N \mid 50 < x \leq 54\}$
c. $A - B = \{x \in N \mid 30 < x \leq 50\}$ **d.** $A - B = \{x \in N \mid 20 \leq x < 30\}$

0,25 punti

6 Sia C l'insieme degli alunni di una classe di una certa scuola, P l'insieme degli alunni di quella scuola che hanno un computer, Q l'insieme degli alunni di quella classe che hanno un computer. Supposto che ci siano altri studenti della scuola che hanno un computer oltre a quelli della classe considerata, costruisci il diagramma di Eulero-Venn relativo a questi insiemi e stabilisci poi se sono vere o false le seguenti scritture:

a. $C \cap P = Q$ **b.** $Q \supset P$ **c.** $P \cup Q = P$ **d.** $Q \subset C$ **e.** $C - P = Q$

0,5 punti

7 Sia A un insieme di 12 persone. In quanti modi possono salutarsi con una stretta di mano queste persone?

a. 144 **b.** 132 **c.** 66 **d.** 12

0,25 punti

8 Stabilisci quali delle seguenti corrispondenze sono funzioni:

a. la corrispondenza che ad ogni quadro del museo del Louvre associa l'artista che lo ha dipinto
b. la corrispondenza che ad ogni ingresso di un palazzo di una strada associa il numero civico
c. la corrispondenza che ad ogni atleta associa la federazione sportiva cui appartiene
d. la corrispondenza che ad ogni computer associa i software installati.

0,25 punti

9 E' data una funzione $f: A \rightarrow B$; si verifica che:

a. f è suriettiva se il codominio coincide con B V F
b. f è biiettiva se ad ogni $x \in A$ corrisponde un solo $y \in B$ V F
c. se la corrispondenza è di tipo biunivoco, allora f è sia iniettiva che suriettiva V F
d. se f è biiettiva, allora è invertibile V F
e. tutte le funzioni iniettive sono invertibili. V F

0,5 punti

10 Se $f: x \rightarrow 1-x$ e $g: x \rightarrow 2x$, allora $f \circ g$ è la funzione:

a. $x \rightarrow 2(1-x)$ **b.** $x \rightarrow 1-2x$ **c.** $x \rightarrow 2x-1$ **d.** nessuna delle precedenti

0,25 punti

Sui numeri

11 In base alle proprietà delle operazioni, stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false:

a. $3+(9 \cdot 4:3)=(3+9) \cdot (3+4):(3+3)$ V F
b. $(18-6+24):3=(18:3)-(6:3)+(24:3)$ V F
c. $3 \cdot 2-4=3 \cdot (2-4)$ V F
d. $184-27=(184+6)-(27-6)$ V F

0,25 punti

12 Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando, dove possibile le proprietà delle potenze:

a. $\left\{\left[5^3 \cdot 5^2 : (5^2)^2\right] \cdot [(3^4:3^2):3^0]\right\}^4 : (3^2 \cdot 5)^3$

b. $\left[(3^2)^0 \cdot (3^2)^2\right]^3 : (3^5)^2 + \left[2^3 \cdot 2^5 : 2^7 + (3^3:3^2) \cdot (3^2+3^3)^2 : (6^2 \cdot 6)\right] : 2$

0,5 punti per ogni esercizio

13 Semplificando la seguente espressione:

$-2+(-5-6+7)-[+2-(-3-7-4)-(5-8+12)-(-7+21)]$

si ottiene:

a. 1 **b.** 0 **c.** -1 **d.** 2

0,25 punti

14 Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali:

a. $0{,}56$ **b.** $-0{,}2\overline{3}$ **c.** $0{,}1\overline{7}$ **d.** $0{,}0012$ **e.** $1{,}\overline{32}$

0,25 punti

15 Semplificando l'espressione: $-\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^2+1-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right]:\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^0-\left(\frac{2}{5}-1\right)^2\right]-\frac{3}{2}$

si ottiene: **a.** $-\frac{1}{2}$ **b.** $+\frac{1}{4}$ **c.** $-\frac{1}{4}$

0,5 punti

16 Calcola applicando dovunque è possibile le proprietà delle potenze:

a. $\left\{\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{10} : \left(-\frac{5}{3}\right)^{6}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{5} : \left(-\frac{5}{3}\right)^{0}\right]\right\} : \left(-\frac{5}{3}\right)^{11}$ — 0,5 punti

b. $\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3} : (-2)^{-9}\right\} : \left\{\left[(-2)^{-1}\right]^{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^{4}$ — 1 punto

c. $\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}\right]^{2} : \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{-1} \cdot \left[\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^{-4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ — 1 punto

17 Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

a. $y = \frac{6}{7}x$ **b.** $y = \frac{15}{x}$ **c.** $y = \frac{1}{3}x^2$ — 0,5 punti per ogni esercizio

Soluzioni

1 **c.**; **f.**

2 **a.** $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; **b.** $B = \{p, a, l\}$; **c.** $C = \{1, 3, 9\}$; **d.** $D = \{\ \}$

3 B non è sottoinsieme; C improprio; D proprio; E non è sottoinsieme; F improprio

4 ① **a.**; ② **c.**

5 **a.**

6 **a.** V; **b.** F; **c.** V; **d.** V; **e.** F

7 **c.**

8 **a.** si; **b.** si; **c.** si; **d.** no

9 **a.** V; **b.** F; **c.** V; **d.** V; **e.** F

10 **b.**

11 **a.** F; **b.** V; **c.** F; **d.** F

12 **a.** 45; **b.** 19

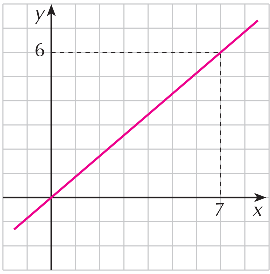
13 **a.**

14 **a.** $\frac{14}{25}$; **b.** $-\frac{7}{30}$; **c.** $\frac{8}{45}$; **d.** $\frac{3}{2500}$; **e.** $\frac{131}{99}$

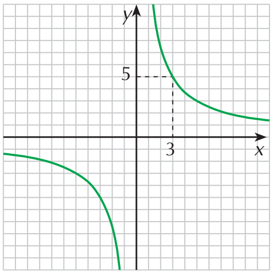
15 **c.**

16 **a.** $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$; **b.** $(-2)^3 = -8$; **c.** $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

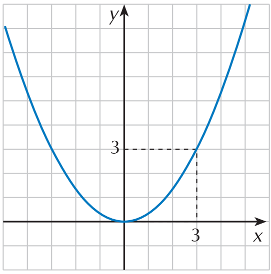
17 **a.**



; **b.**



; **c.**



Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
Punteggio																		

Valutazione in decimi

Math in English

Gli esercizi proposti in questa rubrica conclusiva dell'area provengono da gare di Matematica internazionali e da esami finali, opportunamente adattati, in varie scuole dei Paesi di lingua anglosassone.

Glossary

average	media	**multiple**	multiplo
decimal	(numero) decimale	**prime**	(numero) primo
domain	dominio	**range**	codominio
to evaluate	valutare, calcolare	**relation**	relazione
to factor (factorize)	fattorizzare	**set**	insieme
greatest common divisor	massimo comun divisore	**subset**	sottoinsieme
least common multiple	minimo comune multiplo	**trust fund**	fondo fiduciario

1 Let $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ be the universal set. Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $T = \{6, 7, 8, 9\}$. Find each of the following numbers.
- **a.** How many subsets does U have?
- **b.** Give an example of a 5-elements subset.
- **c.** If A is a subset of U, give an example of A so that $A \cap S$ has 4 elements with 6 as a member and one that does not have 6 as a member.
- **d.** If B is a subset of U, give an example of B so that $B \cap T$ has 3 elements with 8 as a member and one that does not have 8 as a member.

2 All A are B. All C are D. Some C are not B.
Say which of the following conclusions follow from the given premises and which do not.
- **a.** All A are D.
- **b.** Some D are not A.
- **c.** All A are C.

3 While selecting candy for students in his class, Stefan must choose between gummy candy and licorice nibs. Gummy candy packets come in three sizes, while packets of licorice nibs come in two. If he chooses gummy candy, he must select either gummy bears, gummy worms, or gummy dinos. If he chooses licorice nibs, he must choose between red and black. How many choices does he have?

4 According to a New York Times report on the 16 top-performing restaurant chains, 11 serve breakfast, 11 serve beer, and 10 have full table service. All 16 offered at least one of these services. A total of 5 were classified as "family chains," meaning that they serve breakfast, but do not serve alcohol. Further a total of 5 serve breakfast and have full table service, while none serve breakfast, beer, and also have full table service.
- **a.** How many serve beer and breakfast?
- **b.** How many serve beer but not breakfast?
- **c.** How many serve breakfast, but neither have full table service, nor serve beer?
- **d.** How many serve beer and have full table service?

5 Is the given relation a function and what is the Domain and the Range of the relation?
$\{(-2, 2), (-2, -3), (3, 4), (2, 5)\}$

a. Yes, $D = \{-2, 3, 2\}$, $R = \{2, -3, 4, 5\}$
b. No, $D = \{-2, 3, 2\}$, $R = \{2, -3, 4, 5\}$
c. Yes, $D = \{2, -3, 4, 5\}$, $R = \{-2, 3, 2\}$
d. No, $D = \{2, -3, 4, 5\}$, $R = \{-2, 3, 2\}$
e. none of these

6 Given $f(x) = x^2 - 3$ and $g(x) = x + 1$, which of the followings is $g \circ f$?

a. $x^2 + 2x - 2$ **b.** $x^2 + 2x$ **c.** $2x - 2$ **d.** $x^2 - 2$ **e.** $2x^2 + 2x - 2$

7 20% of what is 45?

a. 36 **b.** 9.2 **c.** 225 **d.** $9.20

8 Evaluate: $(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2$

a. -7 **b.** 29 **c.** 31 **d.** 25 **e.** none of these

9 Perform the indicated operation: $(-1)(-1)(-4)(-1)(-3)$

a. 12 **b.** -12 **c.** -10 **d.** 10 **e.** -36

10 What is the percent increase from 10 to 14?

a. 28.6% **b.** 10% **c.** 4% **d.** 40% **e.** 25%

11 **a.** Factorize 1540 into primes. **b.** Find the least common multiple of 78 and 65.
c. Write 255% as a fraction. **d.** Find the greatest common divisor of 66 and 55.
e. Evaluate $(4^3 : 2 - 7) : 5$ **f.** Write $\frac{5}{9}$ as a decimal.

12 The heights for 5 basketball players (in metres) are listed below. What is their average height? Round to the nearest hundreths.

2.08m 2.21m 2.26m 2.11m 2.31m

a. 2.20m **b.** 2.196m **c.** 2.19m **d.** 2.0m

13 On the day of a child's birth, a deposit of $25,000 was made in a trust fund that pays $8.75% interest, compounded continuously, determine the balance in this account on the child's 25th birthday.

2 a. doesn't follow; **b.** follows; **c.** doesn't follow **3** 13 **4 a.** 6; **b.** 5; **c.** 0; **d.** 5

5 b. **6 d.** **7 c.** **8 d.**

9 b. **10 d.** **12 c.** **13** $203,550.25