Concetti chiave e regole

Le funzioni goniometriche inverse

Le funzioni inverse delle goniometriche fondamentali sono:

- $y = \arcsin x$ definita in $[-1,\ 1]$ con codominio $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
- $y = \arccos x$ definita in $[-1,\ 1]$ con codominio $[0,\ \pi]$
- $y = \arctan x$ definita in $(-\infty,\ +\infty)$ con codominio $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

Accanto a queste ricordiamo anche l'inversa della funzione cotangente:

- $y = \text{arccot}\, x$ definita in $(-\infty,\ +\infty)$ con codominio $(0,\ \pi)$

Equazioni di tipo elementare

In generale, un'equazione goniometrica si può sempre ricondurre alla risoluzione di una o più **equazioni elementari** della forma:

- $\sin x = a$ con $-1 \leq a \leq 1$
- $\cos x = b$ con $-1 \leq b \leq 1$
- $\tan x = c$ con $c \in R$.

Ciascuna di queste equazioni ha infinite soluzioni che differiscono fra loro per il periodo della funzione; tenendo presente l'intervallo di inversione delle funzioni goniometriche e indicando con α l'angolo appartenente a tale intervallo, le soluzioni si possono scrivere nei seguenti modi:

- $\sin x = a$ se $\alpha = \arcsin a$: $x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$
- $\cos x = b$ se $\alpha = \arccos b$: $x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = -\alpha + 2k\pi$
- $\tan x = c$ se $\alpha = \arctan c$: $x = \alpha + k\pi$

Equazioni che prevedono il confronto di funzioni goniometriche

- $\sin [f(x)] = \sin [g(x)]$ è equivalente a $f(x) = g(x) + 2k\pi \ \vee \ f(x) + g(x) = \pi + 2k\pi$
- $\cos [f(x)] = \cos [g(x)]$ è equivalente a $f(x) = g(x) + 2k\pi \ \vee \ f(x) = -g(x) + 2k\pi$
- $\tan [f(x)] = \tan [g(x)]$ è equivalente a $f(x) = g(x) + k\pi$

Equazioni lineari

Un'equazione lineare assume la forma: $a \sin x + b \cos x + c = 0$

- Se $c = 0$, e solo in questo caso, si può dividere per $\cos x$ ottenendo l'equazione elementare equivalente: $a \tan x + b = 0$.
- Se $c \neq 0$ si possono seguire diversi metodi:
  - usare le formule parametriche verificando preventivamente se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione dell'equazione
  - utilizzare il metodo del sistema associando all'equazione l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

    $$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

  - utilizzare il metodo grafico ponendo nel precedente sistema $\sin x = Y$ e $\cos x = X$: $\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

    Le soluzioni sono rappresentate dalle intersezioni della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1 con la retta di equazione $aY + bX + c = 0$
  - utilizzare il metodo dell'angolo aggiunto trasformando l'equazione nella forma: $\sin (x + \alpha) = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Equazioni omogenee

Un'equazione omogenea di secondo grado ha la forma: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

Per risolverla si divide per $\cos^2 x$ ottenendo l'equazione equivalente $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$

Questo metodo **non si può applicare** se $a = 0$ perché vengono eliminate delle soluzioni; in questo caso l'equazione diventa:

$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ e si può:
- raccogliere $\cos x$: $\cos x(b \sin x + c \cos x) = 0$
- dividere per $\sin^2 x$ se $c \neq 0$: $b \cot x + c \cot^2 x = 0$

L'equazione $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$

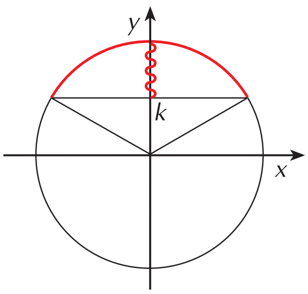
si trasforma in un'omogenea moltiplicando d per 1 cioè per $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

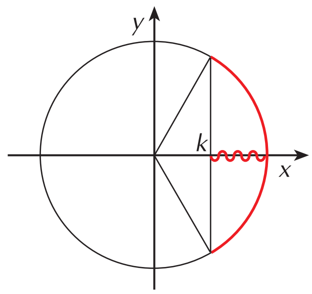
Disequazioni elementari

Per risolvere una **disequazione elementare** in una delle forme $\sin x \gtreqless k$ $\cos x \gtreqless k$ $\tan x \gtreqless k$

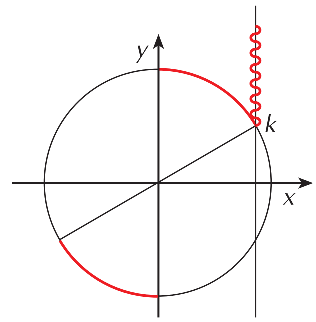
si ricorre alla circonferenza goniometrica individuando gli archi per i quali la funzione al primo membro soddisfa la disequazione



$\sin x > k$



$\cos x > k$



$\tan x > k$

Disequazioni frazionarie e sistemi

Per risolvere una disequazione goniometrica frazionaria oppure un sistema di disequazioni goniometriche si usano gli stessi metodi applicati per le analoghe disequazioni algebriche. È però conveniente usare delle tabelle circolari al posto di quelle lineari.