Approfondimenti

I radicali quadratici doppi

Un radicale doppio è un'espressione della forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

Questi radicali possono essere trasformati nella somma o differenza di due radicali semplici quando si verifica che

$a^2 - b$ **è un quadrato perfetto.**

In questi casi si può dimostrare che valgono le relazioni:

Regola

- $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

- $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Queste espressioni sembrano, a prima vista, più complesse di quelle iniziali; tieni però presente che $a^2 - b$, per le ipotesi che abbiamo fatto, è un quadrato perfetto, quindi $\sqrt{a^2-b}$ è un numero razionale.

Ad esempio, trasformiamo, quando è possibile, i seguenti radicali doppi nella somma o differenza di radicali semplici.

- $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ dove $a = 2$ e $b = 3$ $\qquad \sqrt{a^2-b} = \sqrt{4-3} = 1$

  applichiamo la formula $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2+1}{2}} + \sqrt{\dfrac{2-1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

- $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ dove $a = 4$ e $b = 7$ $\qquad \sqrt{a^2-b} = \sqrt{16-7} = 3$

  applichiamo la formula $\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{4+3}{2}} - \sqrt{\dfrac{4-3}{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

- $\sqrt{12-3\sqrt{7}}$

  Per poter applicare la formula dobbiamo prima portare il fattore 3 sotto il simbolo di radice:

  $\sqrt{12-\sqrt{63}}$

  Verifichiamo la condizione di applicabilità della formula: $a^2 - b = 12^2 - 63 = 81$ che è il quadrato di 9.

  Applichiamo la formula: $\sqrt{12-3\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{12+9}{2}} - \sqrt{\dfrac{12-9}{2}} = \sqrt{\dfrac{21}{2}} - \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

- $\sqrt{5-\sqrt{13}}$

  Verificchiamo se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto: $5^2 - 13 = 12$

  Non abbiamo ottenuto un quadrato perfetto; non è quindi possibile trasformare il radicale nella differenza di due radicali semplifici.

Esercizi

1 **Riconosci** Quali tra i seguenti sono radicali doppi?

a. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ **c.** $\sqrt{3\sqrt{2}}$ **d.** $\sqrt{5+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ **e.** $\sqrt{6:\sqrt{3}}$

[**b.**, **d.**]

2 **Rifletti** In quali tra i seguenti radicali doppi si può usare la formula di trasformazione e scrivere il radicale nella somma o differenza di due radicali semplici?

a. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **b.** $\sqrt{8+\sqrt{39}}$ **c.** $\sqrt{12-\sqrt{5}}$ **d.** $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ [**a.**, **b.**]

Trasforma i seguenti radicalli nella somma di radicali semplici.

3 **esercizio svolto**

a. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ dove $a=3$ e $b=5$

Calcoliamo il valore di h: $h=\sqrt{9-5}=2$

Applichiamo la formula: $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

Per poter applicare la formula è necessario trasportare il fattore 2 all'interno della radice più interna:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{8-\sqrt{60}}$$

Calcoliamo h: $h=\sqrt{64-60}=2$

Applichiamo la formula: $\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-2}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

In alternativa, riconosciamo nell'espressione $8-2\sqrt{15}$ lo sviluppo del quadrato di un binomio:

$$8-2\sqrt{15}=5+3-2\sqrt{15}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$$

Di conseguenza: $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

4 $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ $\left[\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

5 $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ $\left[\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

6 $\sqrt{7-\sqrt{24}}$ $[\sqrt{6}-1]$

7 $\sqrt{9-\sqrt{17}}$ $\left[\sqrt{\frac{17}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

8 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ $[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

9 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $[\sqrt{2}+1]$

10 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ $[\sqrt{3}+2]$

11 $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$ $[2\sqrt{2}-1]$

12 $\sqrt{7+\sqrt{13}}$ $\left[\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

13 $\sqrt{14-\sqrt{27}}$ $\left[\sqrt{\frac{27}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

14 $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ $[\sqrt{2}+\sqrt{7}]$

15 $\sqrt{9+\sqrt{65}}$ $\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{13}{2}}\right]$

16 $\sqrt{14+2\sqrt{45}}$ $[\sqrt{5}+3]$

17 $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ $[2\sqrt{3}+1]$

18 $\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}}$ $\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

19 $\sqrt{\frac{9}{2}-\sqrt{14}}$ $\left[\sqrt{\frac{7}{2}}-1\right]$

20 $\sqrt{20-5\sqrt{7}}$ $\left[\sqrt{\frac{35}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

21 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ $[3+\sqrt{2}]$