Concetti chiave e regole

L'integrale indefinito

La funzione $F(x)$ è la **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ se per tutti i punti di tale intervallo è $F'(x) = f(x)$.

Una funzione $f(x)$ ha infinite primitive che sono però definite a meno di una costante additiva; l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ è il suo **integrale indefinito**:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Le proprietà

L'integrale indefinito gode di alcune proprietà:

- si può portare fuori dal simbolo di integrazione una costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$ con $k \in R$
- l'integrale della somma di due o più funzioni è la somma degli integrali delle singole funzioni $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Gli integrali immediati

Per trovare l'integrale delle funzioni elementari basta leggere la tabella delle derivate da destra verso sinistra con alcuni accorgimenti:

$\int 1\, dx = x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$
$\int x^k\, dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$

I metodi di integrazione

Per calcolare l'integrale indefinito di una funzione si applicano le regole di integrazione delle funzioni fondamentali e le proprietà di linearità.

Nel caso di una **funzione razionale fratta**, dopo aver eventualmente eseguito la divisione del numeratore per il denominatore in modo da ottenere una frazione propria, si opera in questo modo:

- se il denominatore si può scomporre nel prodotto di due o più fattori:
  - si scompone il denominatore della frazione
  - si scrive la funzione come somma di altre frazioni che hanno come denominatori i fattori della scomposizione
  - si integra ciascuna frazione ottenuta;
- se la frazione è del tipo $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ con $b^2 - 4ac < 0$, si scrive il trinomio al denominatore come una somma di quadrati e si integra applicando la regola dell'arcotangente.

- **Metodo di integrazione per parti.** Si usa quando la funzione integranda può essere vista come il prodotto di due funzioni, una delle quali è la derivata di una funzione nota; se $f'(x)$ è la derivata della funzione nota e $g(x)$ è l'altro fattore del prodotto, la formula di integrazione per parti è la seguente:

  $$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

- **Metodo di sostituzione.** Si usa quando, operando un cambio di variabile, si ottiene un integrale facilmente calcolabile. Per applicare questo metodo:
  - si opera la sostituzione $x = g(t)$
  - si calcola il differenziale dei due membri della precedente relazione
  - si operano le sostituzioni
  - si integra e si applicano le sostituzioni inverse alla primitiva ottenuta.

Alcune comode formule di integrazione, ottenute applicando uno dei metodi precedenti, sono poi le seguenti:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+k} dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{x}{\sqrt{k}} + c$ e $\displaystyle\int \frac{1}{[f(x)]^2+k} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{f(x)}{\sqrt{k}} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + c$ e $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{k-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) dx = \arcsin \frac{f(x)}{\sqrt{k}} + c$