SCHEDA DI APPROFONDIMENTO

Le terne pitagoriche

Gli antichi popoli Egiziani e Babilonesi conoscevano la relazione tra i lati di un triangolo rettangolo espressa dal teorema di Pitagora ma non conoscevano la regola generale, bensì solo una serie di casi particolari. Gli Egiziani sapevano infatti che in tutti i triangoli rettangoli, se i cateti misuravano 3 e 4 (unità di misura) l'ipotenusa ne misurava 5 e che la stessa regola valeva per i numeri 5, 12, 13. Essi conoscevano cioè delle *terne* di numeri che rispondevano a quello che più tardi sarebbe stato enunciato come il teorema di Pitagora e che per questo vengono definite *terne pitagoriche*.

DEFINIZIONE. Una **terna pitagorica** è un insieme di tre numeri naturali corrispondenti alle misure dei lati di un triangolo rettangolo e quindi legati tra loro dalla relazione espressa dal teorema di Pitagora.

Anche i Babilonesi utilizzavano quindici diverse terne di numeri con i quali potevano disegnare dei triangoli rettangoli e di cui si servivano anche per la costruzione dei loro grandi monumenti.
Considerando le terne pitagoriche che si possono desumere dalla ***figura 1***, osserviamo che la terna 3, 4, 5 è costituita da tre numeri primi tra loro, mentre la terna 6, 8, 10 si può ottenere dalla prima moltiplicando i tre numeri dati per lo stesso fattore 2. La prima terna prende il nome di **terna primitiva** mentre la seconda di **terna derivata**.
Naturalmente se avessimo moltiplicato la nostra terna primitiva per un fattore diverso da 2, per esempio 5, avremmo ottenuto la terna derivata 15, 20 e 25:

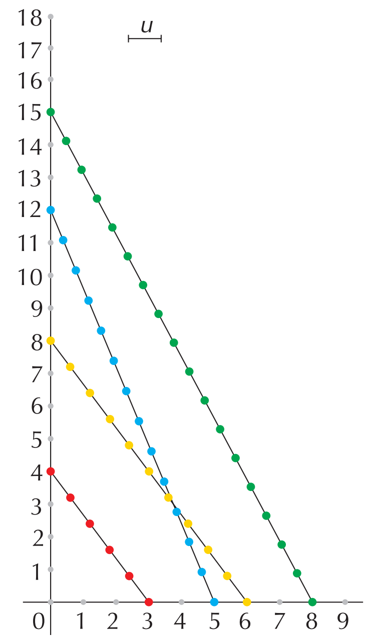
$$3 \cdot 5 = 15; \qquad 4 \cdot 5 = 20; \qquad 5 \cdot 5 = 25$$

Pertanto possiamo ricavare le seguenti:

DEFINIZIONE. Una terna pitagorica si dice **primitiva** quando è formata da numeri primi tra loro.

REGOLA. Una terna pitagorica **derivata** si ottiene moltiplicando la terna pitagorica primitiva per uno stesso fattore diverso da zero.

Figura 1



Oltre ad enunciare il teorema che ha preso il suo nome, Pitagora è riuscito anche ad individuare una procedura che ci consente di calcolare i tre numeri di una terna pitagorica partendo da un numero naturale qualsiasi. Indicando con c il cateto minore, con C il cateto maggiore, con i l'ipotenusa e con n un numero naturale qualunque, la terna pitagorica primitiva si ottiene applicando le seguenti formule:

$$c = n \qquad C = \frac{n^2 - 1}{2} \qquad i = \frac{n^2 + 1}{2}$$

In base al valore attribuito ad n, i casi che si possono verificare sono due:

a. Se n è un **numero dispari**, si ricava una terna primitiva formata da tre numeri naturali.

Ad esempio, se $n = \boxed{7}$ allora $\begin{cases} c = n = 7 \\ C = \dfrac{n^2 - 1}{2} = \dfrac{7^2 - 1}{2} = \dfrac{49 - 1}{2} = \dfrac{48}{2} = 24 \\ i = \dfrac{n^2 + 1}{2} = \dfrac{7^2 + 1}{2} = \dfrac{49 + 1}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \end{cases}$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

b. Se n è un **numero pari**, si ricava una terna pitagorica formata dal numero stesso e da due numeri decimali.

Ad esempio, se $n = \boxed{8}$ allora $\begin{cases} c = n = 8 \\ C = \dfrac{n^2 - 1}{2} = \dfrac{8^2 - 1}{2} = \dfrac{64 - 1}{2} = \dfrac{63}{2} = 31{,}5 \\ i = \dfrac{n^2 + 1}{2} = \dfrac{8^2 + 1}{2} = \dfrac{64 + 1}{2} = \dfrac{65}{2} = 32{,}5 \end{cases}$

Se infine vogliamo ricavare una terna primitiva formata da tre numeri naturali a partire da un numero pari p, dobbiamo ricorrere alle seguenti formule sempre scoperte da Pitagora:

$$c = 2 \cdot p \qquad\qquad C = p^2 - 1 \qquad\qquad i = p^2 + 1$$

Ad esempio, se $p = \boxed{12}$ allora $\begin{cases} c = 2 \cdot p = 2 \cdot 12 = 24 \\ C = p^2 - 1 = 12^2 - 1 = 144 - 1 = 143 \\ i = p^2 + 1 = 12^2 + 1 = 144 + 1 = 145 \end{cases}$

Verifica se hai capito

1 Una terna pitagorica è:

a. un insieme di tre numeri naturali;
b. un insieme di tre numeri naturali legati tra loro dalla relazione espressa dal teorema di Pitagora;
c. un insieme di tre numeri naturali consecutivi.

2 Indica quali delle seguenti terne di numeri rappresentano delle terne pitagoriche:

a. 17, 18, 13; **b.** 23, 24, 25; **c.** 27, 36, 45; **d.** 16,5, 22, 27,5.

3 Indica quali delle seguenti terne pitagoriche sono primitive (dove con a, b, c abbiamo indicato rispettivamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti maggiore e minore):

a. $a = 41$ $b = 40$ $c = 9$;
b. $a = 25$ $b = 20$ $c = 15$;
c. $a = 802$ $b = 798$ $c = 80$.

4 Scrivi due terne pitagoriche derivate per ciascuna delle seguenti terne primitive (dove con a, b, c abbiamo indicato rispettivamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti maggiore e minore):

a. $a = 17$ $b = 15$ $c = 8$;
b. $a = 145$ $b = 143$ $c = 24$;
c. $a = 445$ $b = 437$ $c = 84$.

5 Quante terne pitagoriche derivate si possono ottenere da una terna primitiva?

a. 1; **b.** 10; **c.** 100; **d.** infinite.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas