Approfondimento

Problemi di scelta

Ciò che abbiamo studiato a proposito della retta ci può essere di aiuto per risolvere problemi in cui si deve fare una scelta tra diverse possibilità.
Per esempio quando si acquista un'auto e ci vengono proposte diverse possibilità di pagamento, quando un'azienda deve investire nell'acquisto di un macchinario e deve scegliere tra alcuni che presentano caratteristiche operative diverse, o più semplicemente se si deve scegliere il preventivo migliore per andare in gita (che non è sempre quello che offre il prezzo più basso!).
Vediamo quindi qualche esempio.

I problema.

Ad un impiegato, che si presenta in una agenzia di pratiche automobilistiche, viene offerto un lavoro che consiste nella compilazione di alcune serie di moduli per l'evasione di particolari pratiche. Gli vengono proposte due forme di calcolo dello stipendio lordo:

A: € 800 al mese fisse più € 5 per ogni pratica evasa;

B: € 1500 fisse.

Tenendo presente che non si possono evadere meno di 100 pratiche, pena il licenziamento, quale sarà la scelta più conveniente per l'impiegato?

Analizziamo il problema. Il guadagno dell'impiegato è indipendente dal numero di pratiche evase nel caso B, dipende invece da questo nel caso A.
Indichiamo con x il numero di pratiche che vengono espletate in un mese; non essendo possibile evadere meno di 100 pratiche, il dominio di x è l'insieme $D = \{x \in N \mid x \geq 100\}$.
Se indichiamo con y lo stipendio dell'impiegato, y è funzione di x e avremo, nei due casi, le seguenti relazioni:

A: $y = 5x + 800$

B: $y = 1500$

Sappiamo che, nel piano cartesiano, queste due relazioni rappresentano delle rette, il cui punto di intersezione si calcola risolvendo il sistema delle loro equazioni:

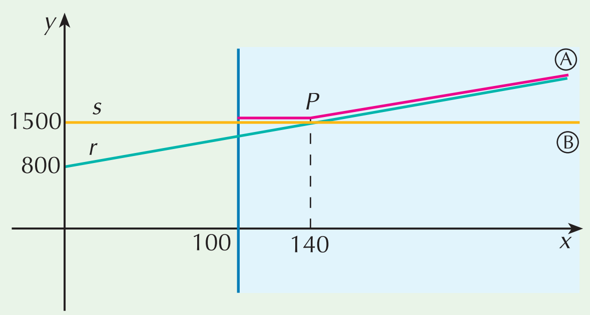
$$\begin{cases} y = 5x + 800 \\ y = 1500 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 140 \\ y = 1500 \end{cases}$$

Le rette si intersecano in $P(140, 1500)$.

Disegniamo le due rette tenendo presente che, per il tipo di numeri coinvolti, si rende necessario usare due unità di misura diverse sui due assi (***figura 1***). Dall'osservazione del grafico possiamo dedurre che

- quando x assume valori minori di 140, i punti della retta r associata all'equazione A hanno una ordinata minore di quelli sulla retta s associata all'equazione B;
- viceversa, se x è maggiore di 140, i punti della retta r hanno ordinata maggiore di quelli della retta s.

Figura 1



© Istituto Italiano Edizioni Atlas

L'ordinata del punto P, corrispondente al caso in cui x vale 140, è la stessa per le due rette.
Lo stipendio dell'impiegato, e di conseguenza la scelta che egli deve fare sulla modalità di pagamento dello stesso, dipenderà dalla sua abilità ad evadere le pratiche: se egli prevede di portare a termine meno di 140 pratiche, gli converrà scegliere la modalità di pagamento B; se egli prevede di riuscire a sbrigare più di 140 pratiche, gli converrà scegliere la modalità A; nel caso particolare in cui egli dovesse evadere proprio 140 pratiche, la scelta diventa indifferente.

Il punto P corrispondente alle 140 pratiche, viene detto **punto di indifferenza**. Riepilogando:

- se $100 \leq x < 140$ la scelta più conveniente è la B
- se $x = 140$ la scelta è indifferente
- se $x > 140$ la scelta più conveniente è la A.

Nella figura abbiamo messo in evidenza la scelta ottimale con un tratto rosso. La soluzione di questo problema può essere rappresentata da una funzione lineare a tratti che ha la seguente equazione:

$$y = \begin{cases} 1500 & \text{se } 100 \leq x < 140 \\ 5x + 800 & \text{se } x \geq 140 \end{cases}$$

II problema.

Una azienda vinicola può imbottigliare, sulla base della disponibilità dei materiali, una quantità di vino variabile fra 30 e 300 litri al giorno in bottiglie da 1 litro ciascuna.
Per fare ciò ha a disposizione tre macchinari che indicheremo con A, B, C, che hanno gli stessi costi di utilizzo per unità di tempo, e di cui si sa che:

- la macchina A impiega 30 secondi per riempire una bottiglia ed ha dei tempi di preparazione iniziali di 1 ora;
- la macchina B impiega 40 secondi per lo stesso lavoro e la sua preparazione iniziale è di 30 minuti;
- la macchina C impiega 1 minuto per l'imbottigliamento, ma la sua preparazione iniziale richiede solo 15 minuti.

Quale macchina conviene usare?

Analizziamo il problema. La scelta di quale macchina usare dipende dalla quantità di vino disponibile per l'imbottigliamento, ma in ogni caso sappiamo che la produzione minima è di 30 bottiglie al giorno, quella massima di 300. Se indichiamo con x il numero di bottiglie prodotte in un giorno, il dominio di x è l'insieme $D = \{x \in N \mid 30 \leq x \leq 300\}$.
Indichiamo con y il tempo, misurato in minuti, di utilizzo di ogni macchina per l'imbottigliamento delle x bottiglie; y è funzione di x e le relazioni algebriche che legano le due variabili sono nei tre casi:

- Per la macchina A: il tempo totale è dato da mezzo minuto per ognuna delle x bottiglie $\left(\frac{1}{2}x\right)$ più 1 ora (60 minuti) per la preparazione. Otteniamo la relazione: $y = \frac{1}{2}x + 60$.
- Per la macchina B: il tempo totale è dato da 40 secondi, equivalente a $\frac{2}{3}$ di minuto, per ognuna delle x bottiglie $\left(\frac{2}{3}x\right)$, più 30 minuti per la preparazione. Otteniamo la relazione: $y = \frac{2}{3}x + 30$.
- Per la macchina C: il tempo totale è dato da 1 minuto per ognuna delle x bottiglie più 15 minuti per la preparazione. Otteniamo la relazione: $y = x + 15$.

Rappresentiamo in un sistema di riferimento cartesiano le tre rette corrispondenti alle equazioni ottenute (***figura 2*** di pagina seguente).

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

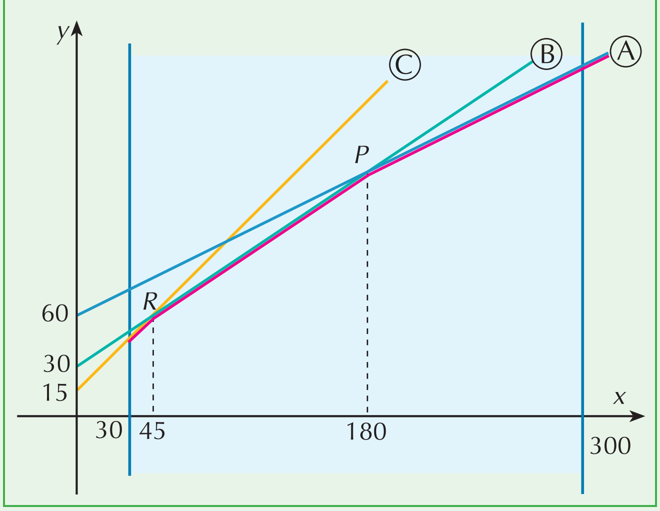
La scelta più conveniente per l'azienda è quella che comporta un minor tempo di utilizzo della macchina e quindi un minor costo di produzione; graficamente le scelte ottimali sono indicate dal percorso in rosso. Dobbiamo dunque determinare i punti di intersezione delle rette dei tempi delle macchine *C* e *B* e poi *B* e *A*. Non è invece necessario trovare il punto d'intersezione delle rette dei tempi di *A* e *C*.

Risolviamo dunque i sistemi

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + 30 \\ y = x + 15 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R(45,\ 60) \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 60 \\ y = \dfrac{2}{3}x + 30 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P(180,\ 150)$$

R e *P* rappresentano i punti in cui è indifferente scegliere di usare una macchina piuttosto che l'altra fra le due rappresentate dalle rette in questione.

Figura 2



Dall'analisi del grafico deduciamo che:

- se $30 \leq x < 45$ i tempi minori sono quelli relativi alla macchina *C* perché per tali valori di x la retta di questa macchina ha le ordinate minori;
- se $x = 45$ i tempi della macchina *C* e quelli della macchina *B* sono uguali, quindi la scelta può cadere indifferentemente sull'una o sull'altra macchina;
- se $45 < x < 180$ i tempi minori sono quelli relativi alla macchina *B*;
- se $x = 180$ i tempi delle macchine *A* e *B* sono uguali, quindi la scelta è indifferente;
- se $180 < x \leq 300$ i tempi minori sono quelli della macchina *A*.

Anche la soluzione di questo problema può essere rappresentata mediante una funzione lineare a tratti di equazione:

$$y = \begin{cases} x + 15 & \text{se } 30 \leq x < 45 \\ \dfrac{2}{3}x + 30 & \text{se } 45 \leq x \leq 180 \\ \dfrac{1}{2}x + 60 & \text{se } 180 < x \leq 300 \end{cases}$$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

Ad uno studente universitario che, per pagarsi gli studi deve lavorare, viene proposta un'attività di vendita porta a porta di enciclopedie per la casa. L'azienda che distribuisce questi prodotti pone come condizione ai venditori di vendere almeno 4 enciclopedie al mese e propone due alternative per i compensi, che indichiamo con A e B:

A: € 400 al mese a forfait, cioè indipendentemente dal numero di enciclopedie vendute.

B: € 200 di quota fissa più € 25 per ogni enciclopedia venduta.

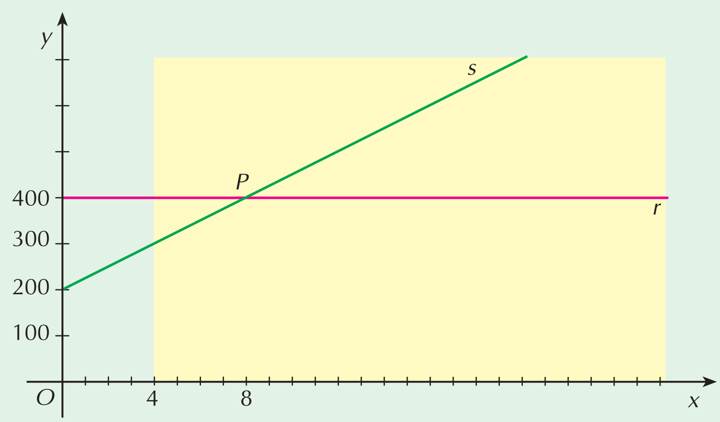
Quale sarà la scelta più conveniente per lo studente?

Analizziamo il problema. Il guadagno dello studente è indipendente dal numero di enciclopedie vendute nel caso A; dipende invece da questo nel caso B.
Indichiamo con x il numero di enciclopedie vendute; ricordando che non è possibile venderne meno di 4, pena il licenziamento, il dominio di x è l'insieme $D = \{x \in N \mid x \geq 4\}$.
Se indichiamo con y il guadagno dello studente, y è funzione di x e avremo, nei due casi, le seguenti relazioni:

$A : y = 400$

$B : y = 25x + 200$

Nel piano cartesiano, queste due relazioni rappresentano delle rette, il cui grafico è nella figura a lato; notiamo che, per rappresentarle, abbiamo dovuto usare due diverse unità di misura sugli assi.
Nella stessa figura abbiamo poi indicato il dominio del problema, che ricordiamo è l'insieme degli $x \geq 4$, con uno sfondo di colore giallo.
Il punto di intersezione delle due rette si trova risolvendo il sistema



$$\begin{cases} y = 400 \\ y = 25x + 200 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad P(8,\ 400)$$

Dal grafico possiamo dedurre che, quando x assume valori minori di 8, i punti della retta r hanno un'ordinata maggiore di quelli sulla retta s; viceversa, se x è maggiore di 8 sono i punti della retta s ad avere ordinata maggiore di quelli sulla retta r; l'ordinata del punto P corrispondente ad $x = 8$ è invece la stessa per le due rette.
Il guadagno del nostro studente, e di conseguenza la scelta di come essere pagato, dipenderà quindi dalle sue capacità di vendita: se egli prevede di vendere meno di 8 enciclopedie, gli converrà scegliere la forma di pagamento A (corrispondente alla retta r); se egli prevede di riuscire a vendere più di 8 enciclopedie al mese, gli converrà scegliere la forma di pagamento B (corrispondente alla retta s); nel caso poi in cui egli vendesse proprio 8 enciclopedie, sarà indifferente scegliere l'una o l'altra forma.
Il punto P viene per questo motivo detto **punto di indifferenza**.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Riepilogando:

- se $4 \leq x < 8$ la scelta più conveniente è la A;
- se $x = 8$ la scelta è indifferente;
- se $x > 8$ la scelta più conveniente è la B.

2 Ad un impiegato vengono proposte tre forme di calcolo dello stipendio:
A: € 800 al mese più € 10 per ogni pratica evasa;
B: € 1 500 al mese fisse;
C: nessuno stipendio base ma € 50 per ogni pratica evasa.
Determina, al variare del numero x di pratiche evase ogni mese, la scelta più conveniente per l'impiegato. [$x \leq 30 : B$; $x \geq 30 : C$, con $x \in N$]

3 Un industriale per fabbricare le sue scatole di cartone può usare due differenti tipi di produzione che indichiamo con A e B.
Per il tipo di produzione A la spesa di manodopera per ogni pezzo è di € 12, più una spesa fissa giornaliera di € 240.
Il tipo di produzione B comporta invece una spesa fissa di € 360 più una spesa per pezzo di € 10.
Determina il tipo di produzione giornaliera più conveniente per l'industriale al variare della quantità x prodotta. [$x \leq 60 : A$; $x \geq 60 : B$, con $x \in N$]

4 Ripeti l'esercizio precedente supponendo che, anche per l'alternativa B, la spesa per ogni pezzo sia di € 12. Che cosa osservi?

5 Un piccolo industriale produttore di magliette, può scegliere tre diversi modi per produrle con i seguenti costi:
A: una spesa fissa di € 84 più € 0,60 per ogni maglietta prodotta;
B: una spesa fissa di € 210 più € 0,25 per ogni maglietta prodotta;
C: una spesa di € 1 per ogni maglietta prodotta.
Determina l'alternativa più conveniente in dipendenza del numero di magliette prodotte giornalmente, sapendo che le ore di lavorazione del personale consentono di produrne non meno di 150 ma non più di 400. [$150 \leq x \leq 210 : C$; $210 \leq x \leq 360 : A$; $360 \leq x \leq 400 : B$, con $x \in N$]

6 Il sig. Rossi per il riscaldamento della sua casa in montagna può scegliere tra le seguenti due forniture di combustibile:
A: € 0,97 al litro più le spese di trasporto di € 20;
B: € 1 al litro più le spese di trasporto di € 5.
Scrivi per ciascuna fornitura la funzione che rappresenta il costo e determina quale delle due risulta più conveniente. [$x \leq 500 : B$; $x \geq 500 : A$, con $x \in R$]

7 Il preventivo per il trasporto di una data merce presentato da due imprese A e B è il seguente:
A: € 0,50 al quintale più una spesa fissa di € 200;
B: € 0,90 al quintale più una spesa fissa di € 120.
Sapendo che il numero dei quintali da trasportare non è mai superiore ai 400, determina il preventivo più conveniente. [$x \leq 200 : B$; $200 \leq x \leq 400 : A$, con $x \in R$]

8 ## ESERCIZIO GUIDATO

Un calzaturificio dispone di due macchinari per tagliare e cucire la pelle per confezionare scarpe. La prima macchina necessita di un tempo di 15 minuti per essere predisposta e prepara la pelle per tre paia di scarpe al minuto; la seconda macchina necessita di 30 minuti per essere predisposta e prepara

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

la pelle per 4 paia di scarpe al minuto. Determina, al variare del numero di scarpe che si devono preparare, qual è la macchina più conveniente da usare, tenendo presente che, vista la disponibilità di pelle giornaliera, non è possibile confezionare più di 250 paia di scarpe al giorno.

Per preparare un paio di scarpe per la lavorazione occorre un tempo in minuti pari a:

- per la prima macchina: $\frac{1}{3}$
- per la seconda macchina: $\frac{1}{4}$

Il tempo totale y (in minuti) per produrre x paia di scarpe, tenendo conto anche del tempo di preparazione, è quindi:

- per la prima macchina: $y = 15 + \frac{1}{3}x$
- per la seconda macchina: $y = 30 + \frac{1}{4}x$

Confronta adesso le due rette e determina la scelta più conveniente al variare di x.

[$x \leq 180$: I macchina; $180 \leq x \leq$: 250 : II macchina, con $x \in N$]

9 Una ditta che produce bulloni possiede due macchine. La prima richiede un tempo di preparazione di mezz'ora e produce 3 bulloni al minuto; la seconda richiede 50 minuti per la preparazione e produce 6 bulloni al minuto. Ogni macchina non può rimanere accesa per più di 8 ore consecutive. Determina, al variare del numero x di bulloni prodotti, in quali casi conviene usare l'una o l'altra macchina.

[$x \leq 120$: I macchina; $120 \leq x \leq 2580$: II macchina, con $x \in N$]

10 Una banca pubblicizza due forme di investimento di capitali. Nel primo caso offre un rendimento netto del 6% diminuito di € 500 per le spese sostenute dalla banca per la gestione del capitale; nel secondo caso offre una rendita netta del 4% diminuita di € 200. Determina, al variare del capitale x investito, qual è la forma di investimento più conveniente.

[$x < 15000$: la seconda; $x \geq 15000$: la prima, con $x \in R$]

11 Una azienda deve inscatolare i suoi prodotti e per fare ciò ha a disposizione tre macchinari che indichiamo con A, B, C. La macchina A necessita di 15 minuti per essere predisposta all'uso e confeziona 10 scatole al minuto; la macchina B necessita di 30 minuti di preparazione e prepara 15 scatole al minuto; la C non necessita di tempi di riscaldamento e prepara 6 scatole al minuto. La produzione massima giornaliera non supera le 5 000 scatole. Determina, al variare del numero x di scatole da confezionare, qual è la macchina più conveniente da usare.

[$x \leq 225$: C; $225 \leq x \leq 450$: A; $450 \leq x \leq 5000$: B, con $x \in N$]

12 Un biscottificio può confezionare i suoi biscotti in due modi diversi A e B. Ogni confezione viene poi rivenduta rispettivamente a € 8 e € 6,50. Sapendo che il confezionamento di tipo A comporta una spesa fissa di utilizzo dei macchinari di € 200, più una spesa variabile unitaria di € 2, mentre quello di tipo B una spesa fissa di € 80, più una spesa variabile unitaria di € 1,50, determina quale delle due confezioni è più conveniente al variare del numero x di scatole di biscotti prodotte, tenendo presente che la produzione massima giornaliera è di 300 confezioni. [$16 < x \leq 120$: B; $120 \leq x \leq 300$: A, con $x \in N$]

© Istituto Italiano Edizioni Atlas