

# Concetti chiave e regole

## Il concetto di funzione

Una funzione è una relazione che lega gli elementi di due insiemi  $A$  e  $B$  in modo che ad ogni elemento di  $A$  è associato uno ed un solo elemento di  $B$ .

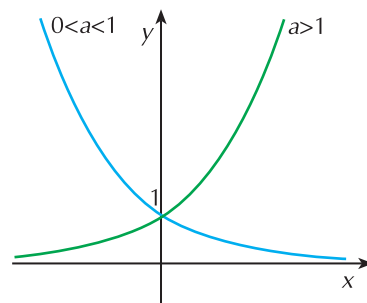
L'insieme  $A$  è detto **dominio** e l'insieme degli elementi di  $B$  che sono associati a qualche elemento di  $A$  è detto **codominio**.

Una funzione è:

- **suriettiva** se il codominio coincide con  $B$
- **iniettiva** se ad elementi distinti di  $A$  corrispondono elementi distinti di  $B$
- **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

## La funzione esponenziale

La funzione  $y = a^x$  (con  $a > 0 \wedge a \neq 1$ ) si chiama **funzione esponenziale** ed è definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ ; il suo grafico è una funzione crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$ ; in ogni caso tutte le funzioni esponenziali passano per il punto di coordinate  $(0, 1)$ .



## Le equazioni esponenziali

Un'equazione è esponenziale se l'incognita compare nell'esponente di almeno una potenza.

Le equazioni della forma  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

sono equivalenti all'equazione  $f(x) = g(x)$

Se le due potenze hanno la stessa base basta quindi uguagliare gli esponenti.

## Le disequazioni esponenziali

Per risolvere una disequazione esponenziale nella forma  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  si deve tener conto della seguente regola:

- se  $a > 1$  si scrive la disuguaglianza dello stesso verso fra gli esponenti:  
 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \rightarrow f(x) > g(x)$
- se  $0 < a < 1$  si scrive la disuguaglianza di verso opposto fra gli esponenti:  
 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \rightarrow f(x) < g(x)$

## La definizione di logaritmo

Chiamiamo **logaritmo in base  $a$  di un numero reale positivo  $b$**  l'esponente  $c$  che si deve dare ad  $a$  per avere  $b$ ; vale cioè la seguente corrispondenza di scritte (con  $a > 0 \wedge a \neq 1$ )

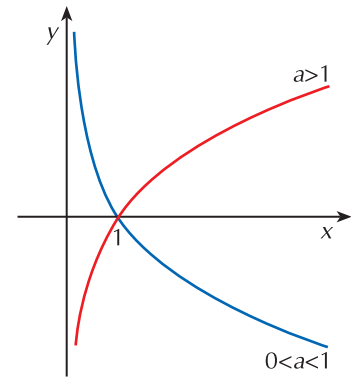
$$\log_a b = c \quad \longleftrightarrow \quad a^c = b$$

In base alla definizione si ha che

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b$

## La funzione logaritmica

La funzione  $y = \log_a x$  (con  $a > 0 \wedge a \neq 1$ ) si chiama **funzione logaritmica** ed è definita per  $x > 0$ ; il suo grafico si può ottenere da quello della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ed è una funzione crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$ ; in ogni caso tutte le funzioni logaritmiche passano per il punto di coordinate  $(1, 0)$ .



## Le proprietà dei logaritmi

Valgono le seguenti proprietà dei logaritmi, supposto che  $a, b, c$  siano numeri reali positivi (con  $a \neq 1$ )

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$  in particolare  $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
- $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

Per passare da un sistema di logaritmi in base  $a$  ad un sistema di logaritmi in base  $c$  si applica la formula

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

I sistemi di logaritmi di uso più comune sono quello in base 10 indicato con il simbolo **log**, e quello naturale indicato con il simbolo **ln**.

## Le equazioni logaritmiche

Un'equazione è logaritmica se l'incognita compare come argomento di almeno un logaritmo.

- Le equazioni della forma  $\log_a f(x) = b$  sono equivalenti all'equazione  $f(x) = a^b$
- Le equazioni della forma  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  sono equivalenti al sistema 
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

## Le disequazioni logaritmiche

Per risolvere una disequazione logaritmica nella forma  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , poste le condizioni di esistenza dei due logaritmi, si deve tener conto della seguente regola:

- se  $a > 1$  si scrive la disuguaglianza dello stesso verso fra gli argomenti:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

- se  $0 < a < 1$  si scrive la disuguaglianza di verso opposto fra gli argomenti:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

## Le equazioni e le disequazioni esponenziali con i logaritmi

Se l'equazione si presenta nella forma  $a^{f(x)} = b$  e  $b$  non è potenza di  $a$ , si ricorre ai logaritmi:

- applicando la definizione di logaritmo:  $f(x) = \log_a b$

oppure

- scrivendo l'uguaglianza tra i logaritmi decimali o naturali dei due membri:  $\log a^{f(x)} = \log b$

Analogamente, una disequazione che si presenta nella forma  $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

è equivalente a quella che si ottiene considerando la disuguaglianza dello stesso verso tra i logaritmi decimali (o naturali) dei due membri:

$$\log a^{f(x)} > \log b^{g(x)} \quad \text{cioè} \quad f(x)\log a > g(x)\log b$$