Cap 1. La probabilità

Rivedi la teoria

La definizione classica

Il valore di probabilità di un evento E esprime una misura della possibilità che ha quell'evento di verificarsi; indicato con f il numero di casi favorevoli ad E e con n il numero dei casi possibili, la probabilità in senso classico è data da:

$$p(E) = \frac{f}{n}$$

Per esempio,

- dato l'evento E : «esce il numero 3» relativo all'esperimento aleatorio del lancio di un dado, si ha che:
  - i casi possibili sono 6, quelli dello spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - vi è un solo caso favorevole

  quindi $p(E) = \frac{1}{6}$
- dato l'evento E : «esce testa» relativo all'esperimento aleatorio del lancio di una moneta, si ha che:
  - i casi possibili sono $2 : \Omega = \{T, C\}$
  - vi è un solo caso favorevole

  quindi $p(E) = \frac{1}{2}$
- dato l'evento E : «esce un numero rosso» giocando alla roulette, si ha che:
  - i casi possibili sono 37
  - i casi favorevoli sono 18 (nel gioco della roulette ci sono 18 numeri rossi e 18 numeri neri, 0 non è né rosso né nero)

  quindi $p(E) = \frac{18}{37}$.

Fai gli esercizi

1 Servendoti della definizione classica, calcola la probabilità dei seguenti eventi:

a. lanciando un dado, E : «esce un numero dispari»

b. estraendo una carta da un mazzo di 40, E : «viene estratto il tre di cuori»

c. estraendo una carta da un mazzo di 40, E : «viene estratto un due»

d. estraendo a caso una cifra della numerazione decimale, E : «esce 8».

2 In una classe ci sono 25 studenti e l'insegnante decide di controllare il quaderno dei compiti a uno studente scelto a caso dall'elenco del registro di classe. Determina la probabilità che:

a. esca il dodicesimo studente dell'elenco

b. esca uno studente fra i primi 10 dell'elenco

c. se ci sono 4 studenti il cui cognome inizia con la lettera C, esca uno studente il cui cognome non inizia con la lettera C.

3 Lanciando un dado, qual è la probabilità di ottenere:

a. il numero 6 **b.** un numero minore di 3 **c.** un numero primo.

Rivedi la teoria

Eventi composti

Un evento E si dice composto se è il risultato della combinazione di altri eventi semplici; in particolare si parla di:

- **evento unione** di altri due eventi A e B se E è verificato quando si verifica almeno uno dei due eventi A o B.
  Per esempio, nell'esperimento aleatorio del lancio di un dado, se A è l'evento «esce 3» e B è l'evento «esce 1», l'evento unione è «esce 3 oppure 1».
- **evento intersezione** di altri due eventi A e B se E è verificato quando si verificano entrambi gli eventi A e B.
  Per esempio, nell'esperimento aleatorio delle estrazioni dei numeri della tombola, se A è l'evento «esce un numero minore di 50» e B è l'evento «esce un numero maggiore di 20», l'evento intersezione è «esce un numero compreso tra 20 e 50, estremi esclusi».

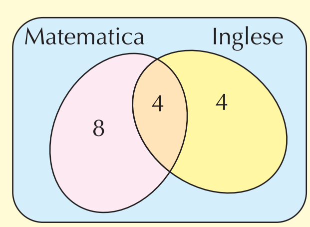
Diciamo poi che:

- due eventi sono **incompatibili** se la loro intersezione è vuota, cioè se il verificarsi dell'uno implica il non verificarsi dell'altro; si dicono compatibili in caso contrario.
  Per esempio, nelle estrazioni del Lotto sono incompatibili gli eventi «esce un numero pari» e «esce un numero dispari».

I teoremi sul calcolo delle probabilità

- **La probabilità dell'evento contrario $\overline{E}$**: se p è la probabilità di un evento E, allora $p(\overline{E}) = 1 - p$.
  Per esempio, poiché la probabilità che nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 esca una figura è $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$, allora la probabilità che non esca una figura è uguale a $1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$.
- **Teorema della probabilità totale**. La probabilità dell'evento E unione di due eventi A e B è uguale a:
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  La formula si semplifica se i due eventi sono incompatibili perché, in questo caso, $p(A \cap B) = 0$, ed è:
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
  Per esempio, se dei 30 studenti di una classe, 12 devono frequentare il corso di recupero di matematica, 8 quello di inglese e 4 di entrambe le materie, allora la probabilità che, scelto uno studente a caso nella classe questo debba frequentare uno dei due corsi è uguale a:

$$\frac{12}{30} + \frac{8}{30} - \frac{4}{30} = \frac{8}{15}$$



Fai gli esercizi

4 La probabilità di scegliere una persona con gli occhiali all'interno di un gruppo è 0,12. Qual è la probabilità di trovare nel gruppo una persona che non porta gli occhiali?

5 Dati i seguenti eventi, individua gli eventi elementari componenti e stabilisci se si tratta della loro unione o dell'intersezione:

a. nel lancio di una moneta e di un dado, E : «esce testa e un numero pari»

b. nel campionato di calcio di serie A, E : «la Roma o la Lazio vincono lo scudetto»

c. nel campionato costruttori di Formula 1, E : «le prime due classificate sono nell'ordine la Ferrari e la Mercedes»

d. agli scrutini di fine anno scolastico, E : «Lucia e Franco sono promossi alla classe successiva».

6 Individua quali fra le seguenti coppie di eventi sono compatibili o incompatibili:

a. A : «esce una carta di cuori» B : «esce una figura»
nell'estrazione di una carta da un mazzo

b. A : «esce un re» B : «esce un asso»
nell'estrazione di una carta da un mazzo

c. A : «esce testa» B : «esce croce»
nel lancio di una moneta

d. A : «esce un numero minore di 10» B : «esce un numero maggiore di 5»
nell'estrazione di un numero della tombola.

7 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 3 palline rosse, 4 palline gialle e 15 palline nere. Si estrae una pallina; calcola la probabilità dei seguenti eventi:

a. E : «esce una pallina rossa o nera»

b. E : «esce una pallina gialla o rossa»

c. E : «esce una pallina gialla o nera».

Le palline contenute nell'urna sono in totale 22; la probabilità che esca una pallina rossa è $\frac{3}{22}$; quella che esca una pallina nera è $\frac{15}{22}$; essendo gli eventi incompatibili si ha quindi:

$p(E) = \frac{3}{22} + \frac{15}{22} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$.

Procedi analogamente per i casi **b.** e **c.**

8 Una popolazione di 2000 ragazzi, di età compresa tra i 16 e i 22 anni, è stata classificata in base alla sua attività e all'abitudine al fumo; i dati sono rappresentati nella seguente tabella.

Attività	Fumatore	Non fumatore	TOTALE
Studente scuola superiore	216	328	
Studente universitario	512	362	
Lavoratore	436	146	
Totale			

Completa la tabella indicando i totali di riga e colonna e calcola la probabilità che un ragazzo scelto a caso sia:

a. un fumatore
b. un lavoratore
c. un non fumatore studente universitario o lavoratore
d. un fumatore studente.

9 Calcola la probabilità che, nel gioco della roulette, esca:
a. un numero minore di 10 compreso lo zero, oppure un numero maggiore o uguale a 30
b. un numero pari oppure un numero minore di 10, escluso lo 0
c. un numero rosso oppure lo zero.
(Suggerimento: attenzione al caso **b.**: gli eventi componenti sono compatibili, devi quindi calcolare l'intersezione degli insiemi dei casi favorevoli a tali eventi)

Risultati di alcuni esercizi

1. **a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{1}{40}$; **c.** $\frac{1}{10}$; **d.** $\frac{1}{10}$

2. **a.** $\frac{1}{25}$; **b.** $\frac{2}{5}$; **c.** $\frac{21}{25}$

3. **a.** $\frac{1}{6}$; **b.** $\frac{1}{3}$; **c.** $\frac{1}{2}$

4. 0,88

5. **a.** intersezione; **b.** unione; **c.** intersezione; **d.** intersezione

6. **a.** compatibili; **b.** incompatibili; **c.** incompatibili; **d.** compatibili

7. **b.** $\frac{7}{22}$; **c.** $\frac{19}{22}$

8. **a.** 0,582; **b.** 0,291; **c.** 0,254; **d.** 0,364

9. **a.** $\frac{18}{37}$; **b.** $\frac{23}{37}$; **c.** $\frac{19}{37}$

Verifica del recupero

1 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:
La probabilità che nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40 esca:

a. una carta di fiori è $\frac{1}{40}$
b. una figura di quadri è $\frac{3}{40}$
c. una figura è $\frac{3}{10}$
d. un asso di colore nero è $\frac{1}{10}$

2 punti

2 Un'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 blu. Calcola la probabilità che, estraendo a caso una pallina, questa sia:
a. non rossa
b. bianca o rossa
c. rossa o blu.

2 punti

3 Giocando a tombola sono già stati estratti i numeri 3, 12, 42, 63, 29. Calcola che alla prossima estrazione esca:
a. un numero pari oppure maggiore di 80
b. un numero dispari o minore di 30
c. un numero maggiore di 50 oppure minore di 10.

3 punti

4 Ad un posto di blocco alcune guardie di finanza fermano 100 veicoli commerciali e constatano che 60 di questi sono in regola, mentre degli altri alcuni non sono muniti della bolla di accompagnamento delle merci (insieme A), altri portano un peso merci superiore a quello dichiarato (insieme B), altri ancora non trasportano il tipo di merce dichiarata (insieme C). Si possiedono i seguenti dati:

A ha 12 elementi
$A \cap B \cap C$ ha 3 elementi
$B \cap C$ ha 8 elementi
$A \cap B$ ha 4 elementi
$A \cap C$ ha 3 elementi.

Qual è la probabilità che prendendo un veicolo tra i 100 fermati questo abbia commesso:
a. solo un'infrazione di tipo A
b. un'infrazione di tipo B o C ma non A
c. soltanto un'infrazione di tipo C.

3 punti

Soluzioni

1 **a.** F; **b.** V; **c.** V; **d.** F

2 **a.** $\frac{5}{8}$; **b.** $\frac{7}{8}$; **c.** $\frac{1}{2}$

3 **a.** 0,565; **b.** 0,647; **c.** 0,553

4 **a.** $\frac{1}{5}$; **b.** $\frac{7}{10}$; **c.** non si può determinare

Esercizio	1	2	3	4	
Punteggio					

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

die (pl. dice)	dado	**to recall**	ricordare, far tornare alla mente
even number	numero pari	**Yahtzee Roll**	gioco con 5 dadi allineati che vengono lanciati insieme
likely	probabile		
odd number	numero dispari		

1 There are n^2 students in a class. Each week all the students partecipate in a table quiz. Their teacher arranges them into n teams of n players each. For as many weeks as possible, this arrangement is done in such a way that any pair of students who were members of the same team one week are not in the same team in subsequent weeks. Prove that after at most $n+2$ weeks it is necessary for some pair of students to have been members of the same team on at least two different weeks.

2 Recall that a Yahtzee Roll is a roll of five indistinguishable dice.
a. How many different Yahtzee Rolls are possible?
b. How many Yahtzee Rolls have exactly 3 different numbers showing?

3 Ten points are distributed around a circle. How many triangles have all three of their vertices in this 10-elements set?

4 Three horses A, B and C are in a race. A is twice as likely to win as B and B is three times as likely to win as C. What is their respective probability of winning?

5 A typycal roulette wheel has 38 slots that are numbered 1, 2, 3, ..., 35, 36, 0 and 00. The 0 and 00 slots are green. Of the remaining slots, half are red and half are black. Also half of the integers from 1 to 36 are even and half are odd. 0 and 00 are defined neither even or odd. A ball is rolled around the wheel and ends up in one of the slots. We assume that each slot has an equal chance.
a. What is the probability of each slot?
b. What is the probability of the ball landing in a green slot?
c. What is the probability of the ball landing on an even number?
d. What is the probability of getting 1, 12, 24 or 36?

2 a. 252; **b.** 252 **3** 120 **4** $p(A)=\frac{3}{5}$, $p(B)=\frac{3}{10}$, $p(C)=\frac{1}{10}$ **5 a.** $\frac{1}{38}$; **b.** $\frac{1}{19}$; **c.** $\frac{9}{19}$; **d.** $\frac{2}{19}$