Concetti chiave e regole

Gli insiemi di numeri reali

Un insieme E di numeri reali si dice:

- **limitato superiormente** se esiste un numero k, non necessariamente appartenente a E, che è maggiore di tutti gli elementi di E
- **limitato inferiormente** se esiste un numero h, non necessariamente appartenente a E, che è minore di tutti gli elementi di E.

  Un insieme che è limitato sia inferiormente che superiormente si dice semplicemente **limitato**.
- L'**estremo inferiore** di un insieme E è il più grande dei numeri h e, se appartiene all'insieme, è il **minimo** di E.
- L'**estremo superiore** di un insieme E è il più piccolo dei numeri k e, se appartiene all'insieme, è il **massimo** di E.

Le funzioni continue e i criteri per la continuità

Una funzione $f(x)$ definita in un insieme D è **continua** in un punto $x_0 \in D$ e di accumulazione per D se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quindi per vedere se una funzione è continua in x_0 si deve:

- calcolare $f(x_0)$
- calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- verificare che i due valori trovati coincidano.

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto x_0, allora sono continue in x_0 anche le funzioni:

- $-f(x)$ e $|f(x)|$
- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$ e in particolare $kf(x)$ e $[f(x)]^n$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e in particolare $\dfrac{1}{g(x)}$ se $g(x_0) \neq 0$

Se una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo $[a, b]$ diciamo che è continua in $[a, b]$.

Sono continue nel loro insieme di definizione:

- le funzioni polinomiali
- le funzioni razionali fratte
- le funzioni logaritmiche ed esponenziali
- le funzioni goniometriche fondamentali
- le funzioni composte se sono continue tutte le funzioni componenti.

Le proprietà delle funzioni continue

Le proprietà delle funzioni continue sono elencate dai seguenti teoremi:

- **esistenza degli zeri:** se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, allora esiste almeno un punto interno ad $[a, b]$ in cui la funzione si annulla
- **di Weierstrass:** se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, essa è limitata in tale intervallo ed esiste almeno un punto in cui assume il valore massimo ed almeno un punto in cui assume il valore minimo
- **dei valori intermedi:** se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e se x_1 e x_2 sono due punti di tale intervallo tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$, allora la funzione assume almeno una volta tutti i valori compresi fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ al variare di x in (x_1, x_2).

Dagli ultimi due teoremi si deduce poi che se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, allora assume almeno una volta ciascun valore compreso tra il minimo e il massimo.

I punti di discontinuità

Se una funzione non è continua in un punto x_0 si dice che x_0 è un **punto di discontinuità** o anche che è un **punto singolare**.

I punti di discontinuità si possono classificare con il seguente criterio:

- discontinuità di **prima specie** se il limite sinistro e il limite destro sono finiti ma diversi:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \qquad \text{con} \quad \ell_1 \neq \ell_2$$

- discontinuità di **seconda specie** se almeno uno dei due limiti dalla sinistra o dalla destra è infinito o non esiste:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \quad \vee \quad \nexists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$$

- discontinuità di **terza specie** o **eliminabile** se esiste finito il limite per $x \to x_0$ ma tale valore è diverso da quello assunto dalla funzione o se la funzione non esiste in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \wedge \nexists f(x_0)$$

Gli asintoti di una funzione

Una funzione $f(x)$ di dominio D:

- ha un **asintoto verticale** di equazione $x = x_0$ se $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
- ha un **asintoto orizzontale** di equazione $y = \ell$ se $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$
- ha un **asintoto obliquo** di equazione $y = mx + q$ se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q \qquad \text{e se} \qquad m \neq 0$$

Il grafico probabile

Il **grafico probabile** di una funzione $f(x)$ si determina individuando:

- l'insieme di definizione D
- il comportamento agli estremi di D
- gli eventuali asintoti
- le eventuali simmetrie
- le intersezioni, se esistono, con gli assi cartesiani
- il segno
- le coordinate di alcuni punti significativi.