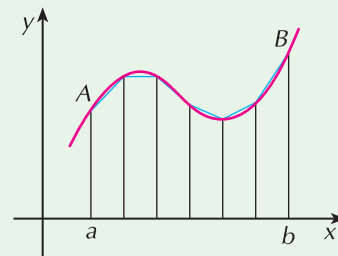


La lunghezza di una linea e l'area di una superficie di rotazione

Oltre alla determinazione di aree e volumi, gli integrali definiti ci permettono di calcolare anche **la lunghezza di un arco di linea piana**.

Sia dunque $y = f(x)$ una funzione continua e siano A e B due suoi punti di ascisse rispettivamente a e b ; per calcolare la lunghezza del tratto di curva compreso tra A e B , possiamo ragionare in questo modo. Suddividiamo come al solito l'intervallo $[a, b]$ in n parti ciascuna di ampiezza Δx e consideriamo la poligonale avente per vertici i punti di f che si trovano in corrispondenza degli estremi degli intervalli individuati (**figura 1**). Poiché conosciamo le coordinate di ogni vertice di tale poligonale (l'ascissa è uno degli estremi degli intervalli Δx , l'ordinata è il corrispondente valore della funzione), possiamo calcolare la lunghezza di ciascuno dei segmenti che la compongono; la lunghezza della poligonale sarà poi la somma delle lunghezze di tutti quei segmenti. Se facciamo tendere n all'infinito, l'ampiezza di ciascuno degli intervalli tende a zero e la poligonale tende a confondersi con il tratto di curva in questione; possiamo quindi definire la lunghezza dell'arco AB di curva come limite, per $n \rightarrow +\infty$ della lunghezza della poligonale. Si dimostra che tale lunghezza ℓ è data dalla relazione

Figura 1



$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Calcoliamo, per esempio, la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = x^2$ che ha per estremi i punti A di ascissa 0 e B di ascissa 2.

Stabilito che $y' = 2x$, dobbiamo calcolare $\int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\int \sqrt{1 + 4x^2} dx$

operando la sostituzione $\sqrt{1 + 4x^2} = t - 2x$

da cui $x = \frac{t^2 - 1}{4t}$ e quindi $\sqrt{1 + 4x^2} = \frac{t^2 + 1}{2t}$

Si ha inoltre che $dx = \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt$, quindi

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt = \frac{1}{8} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2 \ln |t| - \frac{1}{2t^2} \right)$$

Operando la sostituzione inversa otteniamo che

$$\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1 + 4x^2} + 2x)^2 + 2 \ln |\sqrt{1 + 4x^2} + 2x| - \frac{1}{2(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x)^2} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) + \sqrt{17} \approx 4,647$$

L'area di una superficie di rotazione

Se facciamo poi ruotare l'arco AB di curva attorno all'asse x (riferisci ancora alla **figura 1**), otteniamo una **superficie di rotazione** la cui area S si dimostra che è data da

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Considerata la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, calcoliamo per esempio l'area della calotta sferica generata dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco AB , dove A ha ascissa 1 e B ha ascissa 2 (**figura 2**).

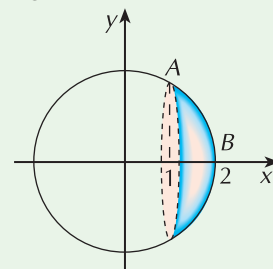
L'equazione della funzione f si ottiene esplicitando quella della circonferenza rispetto alla variabile y e considerandone poi il ramo positivo; di tale funzione ci serve poi anche conoscere la derivata prima. Si ha così che:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

L'area richiesta è dunque data da

$$2\pi \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = 2\pi \int_1^2 2 dx = 4\pi \left[x \right]_1^2 = 4\pi$$

Figura 2



ESERCIZI

Date le seguenti funzioni $f(x)$, determina la lunghezza della linea da esse rappresentata nell'intervallo indicato.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{in } [1, 2]$$

$$\text{Calcoliamo innanzi tutto la derivata della funzione} \quad f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$\text{La lunghezza della linea è quindi} \quad \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx$$

Per calcolare la primitiva della funzione ottenuta operiamo la sostituzione:

$$e^{2x} = t \quad \text{da cui} \quad dx = \frac{1}{2t} dt$$

$$\text{Calcoliamo allora:} \quad \int \frac{t+1}{2t(t-1)} dt$$

$$\frac{A}{2t} + \frac{B}{t-1} = \frac{t+1}{2t(t-1)} \quad \text{se} \quad A = -1 \quad \wedge \quad B = 1$$

$$\int \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\frac{1}{2} \ln |t| + \ln |t-1|$$

Ritornando nella variabile x :

$$\int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln e^{2x} + \ln |e^{2x} - 1| \right]_1^2 = \left[-x + \ln |e^{2x} - 1| \right]_1^2 = \ln (e^2 + 1) - 1 \approx 1,127$$

2	$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$	in $[1, 2]$	$\left[\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$
3	$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-7)^3}$	in $[7, 10]$	$\left[\frac{14}{3}\right]$
4	$f(x) = x\sqrt{x}$	in $[0, 1]$	$\left[\frac{1}{27}(\sqrt{13^3}-8)\right]$
5	$f(x) = x^2$	in $[0, 2]$	$\left[\frac{1}{4}\ln(\sqrt{17}+4) + \sqrt{17} \approx 4,65\right]$
6	$f(x) = \sqrt{2-x^2}$	in $[0, 1]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right]$
7	$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	in $[-3, 3]$	$\left[3\sqrt{10} + \ln(\sqrt{10}+3) \approx 11,305\right]$
8	$y = (x+1)\sqrt{x+1}$	in $[0, 3]$	$\left[\frac{1}{27}(80\sqrt{10}-13\sqrt{13})\right]$

Calcola l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x delle funzioni $f(x)$ assegnate nell'intervallo indicato.

9	$f(x) = \frac{1}{2}x$	$[1, 3]$	$[2\sqrt{5}\pi]$
10	$f(x) = 3x + 1$	$[2, 4]$	$[40\sqrt{10}\pi]$
11	$f(x) = x^2$	$[0, 2]$	$\left[\pi\left[\frac{33}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{32}\ln(\sqrt{17}+4)\right] \approx 53,23\right]$
12	$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$\left[4\pi\left[2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(2+\sqrt{3})\right] \approx 34,69\right]$
13	$f(x) = -x^2 + 1$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{\pi}{16}[14\sqrt{5} + 17\ln(\sqrt{5}+2)] \approx 10,97\right]$