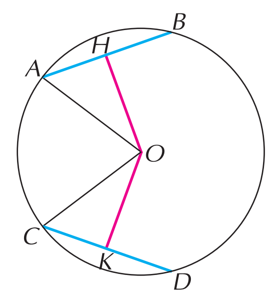
La circonferenza e i poligoni

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

Dimostriamo che due corde congruenti di una circonferenza hanno la stessa distanza dal centro.



Disegniamo una circonferenza, le due corde AB e CD fra loro congruenti e dal centro O le perpendicolari OH e OK a tali corde; l'ipotesi e la tesi del teorema sono dunque le seguenti:

Hp. $AB \cong CD$ **Th.** $OH \cong OK$

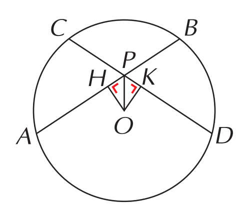
$OH \perp AB$

$OK \perp CD$

Dimostrazione.

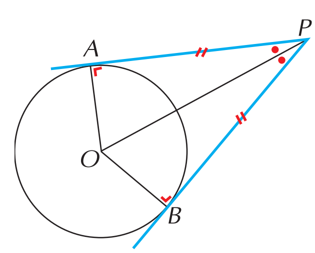
Sappiamo che, se tracciamo dal centro la perpendicolare ad una corda, il piede della perpendicolare è anche il punto medio della corda, quindi, essendo $AB \cong CD$ per ipotesi, possiamo dire che $AH \cong HB \cong CK \cong KD$. Se ora tracciamo i raggi OA e OC, i triangoli rettangoli OAH e OCK sono congruenti perché .... quindi $OH \cong OK$.

2 In una circonferenza due corde congruenti AB e CD si intersecano in un punto P. Dimostra che $CP \cong PB$ e $PA \cong PD$.
(Suggerimento: traccia dal centro O le distanze OH e OK alle due corde e congiungi P con O. I triangoli PHO e PKO sono congruenti perché ....)



3 **ESERCIZIO GUIDATO**

Una retta e una circonferenza sono tangenti se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio; la retta tangente ed il raggio nel punto di tangenza sono dunque perpendicolari. Inoltre, se da un punto P esterno ad una circonferenza si tracciano le rette ad essa tangenti, i segmenti di tangente sono congruenti e la retta che passa per P e per il centro della circonferenza è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti.



Tenendo presenti queste considerazioni dimostriamo il seguente teorema.

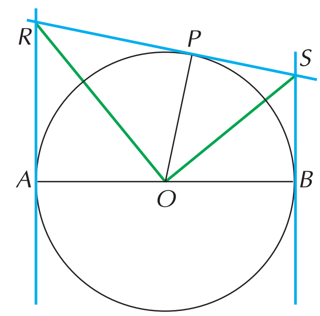
È data una circonferenza di diametro AB e centro O; fissa un punto P su di essa e traccia le rette tangenti in A, B e P. La tangente in P incontra quella in A in R e quella in B in S. Dimostra che l'angolo $\widehat{ROS}$ è retto.

Hp. $AB \perp AR$

$AB \perp BS$

$RS \perp OP$

Th. $\widehat{ROS}$ è retto

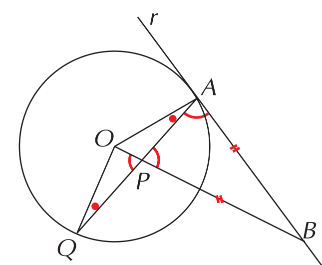


Dimostrazione.

Osserviamo innanzi tutto che le rette AR e BS sono parallele perché .... quindi gli angoli $\widehat{ARP}$ e $\widehat{BSP}$ sono supplementari perché ....

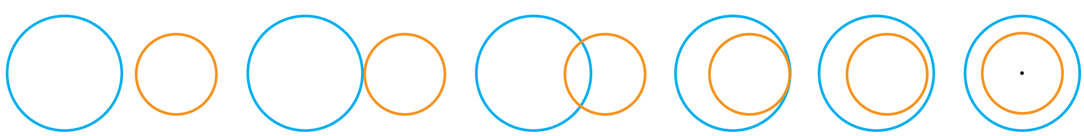
Per il teorema ricordato RO e SO (traccia questi segmenti) sono le .... degli angoli $\widehat{ARP}$ e $\widehat{BSP}$, quindi $\widehat{ORP}$ e $\widehat{OSP}$ sono .... Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è ....

4 Disegna una circonferenza di centro O, prendi un punto A su di essa e traccia la retta r tangente in A; considera poi un punto B su r e traccia il segmento BO; su BO prendi poi un punto P in modo che $BP \cong BA$; traccia AP fino ad incontrare in Q la circonferenza. Dimostra che $\widehat{QOB}$ è retto.
(Suggerimento: tracciato il raggio OA, gli angoli $\widehat{OAP}$ e $\widehat{PAB}$ sono complementari. Spiega le congruenze indicate e deduci da esse che $\widehat{QOB}$ è retto)



5 **ESERCIZIO GUIDATO**

Le **posizioni reciproche che possono assumere due circonferenze** sono quelle indicate nella seguente figura:



esterne ***tangenti esternamente*** ***secanti*** ***tangenti internamente*** ***interne*** ***concentriche***

Consideriamo dunque due circonferenze interne l'una all'altra, tracciamo la retta dei centri e consideriamo le due corde della circonferenza esterna tangenti alla circonferenza più interna e parallele alla retta dei centri. Dimostriamo che tali corde sono congruenti.

Completa innanzi tutto l'ipotesi e la tesi del teorema basandoti sulla figura qui sotto.

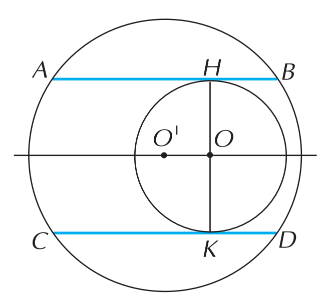
Hp. $AB \parallel$ ....

$CD \parallel$ ....

$OH \perp$ ....

$OK \perp$ ....

Th. $AB \cong CD$



Dimostrazione.

Osserviamo subito che i segmenti OH e OK sono congruenti e che i punti H, O, K sono allineati perché ....

Essendo $AB \parallel CD$ perché ...., OH e OK rappresentano anche la distanza del centro O' della circonferenza più esterna dalle due corde AB e CD; quindi ....

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

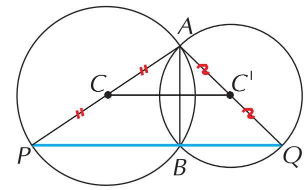
Sappiamo che un **angolo alla circonferenza** è un angolo che ha il vertice sulla circonferenza ed i lati che sono entrambi secanti oppure uno secante e l'altro tangente alla circonferenza. Ad ogni angolo alla circonferenza si può far corrispondere l'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.
Fra un angolo alla circonferenza ed il corrispondente angolo al centro vi è una relazione precisa: l'angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro.
In particolare, un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto.
Tenendo presenti queste considerazioni, dimostriamo il seguente teorema.

Consideriamo due circonferenze secanti di centri C e C' e indichiamo con A e B i loro punti di intersezione; siano poi AP e AQ i diametri delle due circonferenze. Dimostriamo che:

a. i punti P, B e Q sono allineati

b. PQ è congruente al doppio della distanza fra i centri.

Scrivi innanzi tutto l'ipotesi e la tesi del teorema basandoti anche sulla figura qui sotto.



Hp. .... **Th.** ....

Dimostrazione.

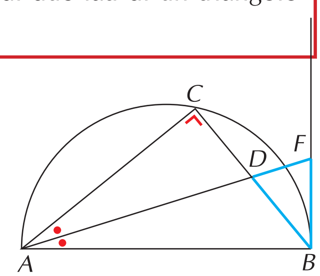
a. L'angolo $\widehat{ABQ}$ è un angolo alla circonferenza che insiste su .... e quindi è ....

Anche l'angolo $\widehat{ABP}$ è un angolo alla circonferenza che insiste su .... e quindi è ....

Allora l'angolo $\widehat{PBQ}$ è .... e quindi i punti P, B, Q sono allineati.

b. Per dimostrare la seconda tesi ricorda che se congiungi i punti medi di due lati di un triangolo ....

7 Disegna una semicirconferenza di diametro AB, traccia una corda AC e la tangente in B alla circonferenza; la bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ incontra la corda BC in D e la retta tangente in F. Dimostra che il triangolo BDF è isoscele.



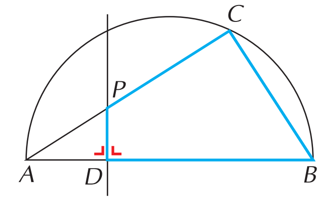
8 **ESERCIZIO GUIDATO**

Ricordiamo che **un poligono si dice inscritto in una circonferenza** se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza. Ogni poligono inscritto ha la caratteristica che gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza e questa caratteristica può essere utilizzata anche per riconoscere se un poligono è inscrittibile o meno.

I **quadrilateri inscritti** hanno una ulteriore proprietà: gli angoli opposti sono supplementari; anche in questo caso questa caratteristica può essere utilizzata per riconoscere se un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza.
Tenendo presenti queste considerazioni, dimostriamo il seguente teorema.

È dato un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, da un punto D del diametro traccia la perpendicolare ad AB stesso che interseca la corda AC in P. Dimostra che il quadrilatero $BCPD$ è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il diametro di tale circonferenza?

Scrivi l'ipotesi del teorema basandoti anche sulla figura a lato.



Hp. .... **Th.** *BCPD* è inscrittibile

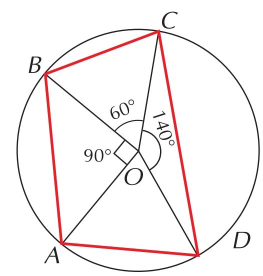
Dimostrazione.

L'angolo $\widehat{PDB}$ è retto, l'angolo $\widehat{ACB}$ ...., quindi ....

Visto che i triangoli *PDB* e *PCB* sono rettangoli, il diametro della circonferenza è il segmento ....

9 Riprendi il teorema precedente e indica con Q il punto di intersezione della retta BC con la perpendicolare PD. Dimostra che anche il quadrilatero $ADCQ$ è inscrittibile in una circonferenza. Sapresti dire qual è il diametro di questa circonferenza?

10 Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di centro O e si conoscono le misure dei seguenti angoli: $\widehat{AOB} = 90°$, $\widehat{BOC} = 60°$, $\widehat{COD} = 140°$. Calcola le misure degli angoli del quadrilatero.

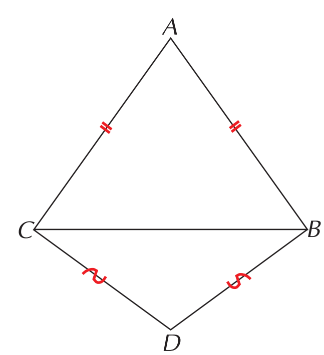


11 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un poligono si dice circoscritto ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Ogni poligono circoscritto ha la caratteristica che le bisettrici dei suoi angoli si incontrano nel centro della circonferenza e questa caratteristica può essere utilizzata anche per riconoscere se un poligono è circoscrittibile o meno.

I **quadrilateri circoscritti** hanno una ulteriore proprietà: la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due; anche in questo caso questa caratteristica può essere utilizzata per riconoscere se un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza.
Dimostriamo allora il seguente teorema.

Un quadrilatero è ottenuto mediante l'accostamento di due triangoli isosceli che hanno la base in comune e che si trovano da parte opposta rispetto alla base. Dimostra che il quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza.



Hp. .... **Th.** *ABDC* è circoscrittibile

....

Dimostrazione.
La dimostrazione è davvero semplice se tieni presenti le considerazioni che abbiamo fatto.

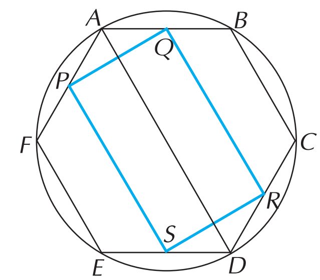
12 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un poligono si dice regolare se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti fra loro. Tutti i poligoni regolari sono sempre inscrittibili e circoscrittibili ad una circonferenza.

Consideriamo un esagono regolare e individuiamo i punti medi di due lati consecutivi e dei loro opposti. Dimostriamo che se congiungiamo tali punti si ottiene un rettangolo.

Hp. .... **Th.** $PQRS$ è un rettangolo

Dimostrazione.



Sappiamo che AD è un diametro della circonferenza circoscritta all'esagono e che i segmenti BC, AD, FE sono paralleli. Allora, per il teorema del fascio di rette parallele, visto che $AQ \cong QB$ e $DR \cong RC$ e che $AP \cong PF$ e $DS \cong SE$, QR è parallelo e congruente a PS; questo significa che $PQRS$ è un parallelogramma. Per dimostrare che si tratta di un rettangolo puoi dimostrare che l'angolo di vertice P (o uno degli altri) è retto.