Sistemi omogenei

Un sistema si dice **omogeneo** se le sue equazioni si possono scrivere come polinomi omogenei uguagliati a un numero d che può eventualmente anche essere nullo.
Fra tutti i sistemi omogenei ci occupiamo di quelli di quarto grado nei quali ciascuna equazione è di secondo grado; essi assumono pertanto la forma:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

Per esempio è omogeneo di quarto grado il sistema: $\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 6 \\ 2x^2 - 5y^2 = 3 \end{cases}$

Per risolvere sistemi di questo tipo si segue un algoritmo particolare.

I caso: $d \neq 0 \ \vee \ d' \neq 0$

Se almeno uno dei valori d e d' è diverso da zero, la procedura da applicare è la seguente, che utilizziamo sul precedente sistema.

I passo

Si utilizza un'incognita ausiliaria t e si opera la sostituzione $y = tx$:

$$\begin{cases} x^2 - 3x \cdot tx - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3tx^2 - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

II passo

Si raccoglie x^2 a fattor comune al primo membro: $\begin{cases} x^2(1 - 3t - 4t^2) = 6 \\ x^2(2 - 5t^2) = 3 \end{cases}$

III passo

Se, come in questo caso, almeno uno dei due termini d è diverso da zero, si esegue la divisione membro a membro delle due equazioni ottenute (nel caso in cui uno dei termini d è zero, occorre lasciare questo termine al numeratore):

$$\frac{x^2(1-3t-4t^2)}{x^2(2-5t^2)} = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1-3t-4t^2}{2-5t^2} = 2 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 3t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2t^2 - t - 1 = 0$$

Il sistema dato è quindi equivalente a quello che si ottiene associando la precedente equazione a una del sistema, scegliamo la seconda:

$$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

IV passo

Si risolve l'equazione in t del nuovo sistema: $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

■ ***V passo***

Otteniamo così i due sistemi:

- $\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - \dfrac{5}{4}x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

- $\begin{cases} t = 1 \\ 2x^2 - 5x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases}$ sistema impossibile

Tornando alla variabile y:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x \\ x = -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (-2,\ 1) \quad \vee \quad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x \\ x = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (2,\ -1)$$

In definitiva, il sistema ha come insieme delle soluzioni $S = \{(2,\ -1),\ (-2,\ 1)\}$.

II caso: d = d′ = 0

Descriviamo la procedura risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 6xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$

Possiamo dire che la coppia (0, 0) soddisfa il sistema, quindi è una sua soluzione. Per trovare le altre, seguiamo una procedura simile a quella del caso precedente.

■ ***I passo***

Operiamo la sostituzione $y = tx$:

$$\begin{cases} 3x^2 + x \cdot tx - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6x \cdot tx + 5t^2x^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + tx^2 - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6tx^2 + 5t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

■ ***II passo***

Raccogliamo x^2 a fattor comune in entrambe le equazioni: $\begin{cases} x^2(3 + t - 2t^2) = 0 \\ x^2(1 + 6t + 5t^2) = 0 \end{cases}$

■ ***III passo***

Non possiamo questa volta dividere membro a membro le due equazioni perché l'espressione $\dfrac{0}{0}$ che otterremmo al secondo membro è priva di significato. Possiamo però applicare la legge di annullamento del prodotto dalla quale, tenendo presente che abbiamo già evidenziato la soluzione $x = 0$, otteniamo:

$$\begin{cases} 3 + t - 2t^2 = 0 \\ 1 + 6t + 5t^2 = 0 \end{cases}$$

Poiché le due equazioni sono in sistema, dobbiamo trovare le loro soluzioni comuni:

- $3 + t - 2t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $1 + 6t + 5t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

La sola soluzione comune è $t = -1$.

IV passo

Tenendo presente la sostituzione fatta possiamo dire che il sistema è verificato da tutte le coppie $(x,\ y)$ nella quali è $y = -x$, cioè da tutte le coppie della forma $(x,\ -x)$.

In definitiva, il sistema ammette infinite soluzioni, tutte della forma $(x,\ -x)$ fra cui anche la coppia $(0,\ 0)$.

ESERCIZI

Comprensione

1 Indica quali fra i seguenti sistemi sono omogenei:

a. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4xy = 1 \\ 3x^2 + y^2 - xy = 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x - y^2 + 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 4xy = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = x \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + xy = -2 \\ x^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

2 Se si opera la sostituzione $y = xt$, il sistema omogeneo $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x^2 - 4xy = 12 \end{cases}$ porta alla risoluzione dell'equazione:

a. $\dfrac{1 + 2t^2}{1 - 4t} = \dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{1 + 2t^2}{1 - 4t} + \dfrac{1}{2} = 0$ **c.** $\dfrac{1 + 2t^2 - 6}{1 - 4t - 12} = 0$ **d.** $\dfrac{1 - 4t}{1 + 2t^2} = 2$

Applicazione

Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

3 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} 2x^2 - 4xy - 3y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$

Il sistema è omogeneo, operiamo quindi la soluzione $y = xt$: $\begin{cases} 2x^2 - 4tx^2 - 3t^2x^2 = 5 \\ x^2 + 2t^2x^2 = 5 \end{cases}$

Raccogliamo x^2 in entrambe le equazioni e, supposto $x \neq 0$, dividiamole membro a membro.

$$\begin{cases} x^2(2 - 4t - 3t^2) = 5 \\ x^2(1 + 2t^2) = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2 - 4t - 3t^2}{1 + 2t^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 5t^2 + 4t - 1 = 0$$

Risolvendo questa equazione otteniamo $t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{5}$ e, ricordando la sostituzione operata $y = xt$, otteniamo i due sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

Risolvendoli, troviamo le soluzioni del sistema dato $\begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$

e pertanto l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right\}.$$

4 $\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ xy + x^2 = 60 \end{cases}$ $[S = \{(5, 7); (-5, -7)\}]$

5 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = \frac{7}{9} \\ x^2 + y^2 = \frac{10}{9} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{3}, -1\right); \left(1, -\frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}, 1\right); \left(-1, \frac{1}{3}\right)\right\}\right]$

6 $\begin{cases} (2x + y)^2 = 4 \\ 4xy + y^2 = 3 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -3\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(-\frac{1}{2}, -1\right); \left(-\frac{1}{2}, 3\right)\right\}\right]$

7 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y(x + y) = 10 \end{cases}$ $[S = \{(3, 2); (-3, -2)\}]$

8 $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$ $[S = \{(0, 0)\}]$

9 $\begin{cases} x^2 - xy = -14 \\ y^2 - xy = 63 \end{cases}$ $[S = \{(2, 9); (-2, -9)\}]$

10 $\begin{cases} (x + y)^2 = 5 - xy \\ xy = 1 \end{cases}$ $[S = \{(1, 1); (-1, -1)\}]$

11 $\begin{cases} x(2x - y) = 3 \\ \frac{x^2}{3} - 3y^2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right); \left(-\frac{3}{2}, -1\right); \left(\frac{6}{\sqrt{35}}, -\frac{11}{2\sqrt{35}}\right); \left(-\frac{6}{\sqrt{35}}, \frac{11}{2\sqrt{35}}\right)\right\}\right]$

12 $\begin{cases} y^2 - 2xy = 0 \\ y^2 + xy - x^2 = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right); \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right\}\right]$

13 $\begin{cases} y^2 + 2xy = 1 \\ 4x^2 + xy + y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\sqrt{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}\right]$

14 $\begin{cases} y^2 - x^2 = 27 \\ xy - x^2 = 9 \end{cases}$ $[S = \{(3, 6); (-3, -6)\}]$

15 $\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(x, \frac{1}{3}x\right)\right\}\right]$

16 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=\dfrac{3}{2} \\ x(x-3y)=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right);\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right);\left(\dfrac{7}{\sqrt{26}},-\dfrac{2}{\sqrt{26}}\right);\left(-\dfrac{7}{\sqrt{26}},\dfrac{2}{\sqrt{26}}\right)\right\}\right]$

17 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+8xy+15y^2=0 \end{cases}$ $[S=\{(0,0)\}]$

18 $\begin{cases} 3x^2+4xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-y^2=-2 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\pm\dfrac{\sqrt{34}}{17},\mp\dfrac{3\sqrt{34}}{17}\right);\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\mp\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}\right]$

19 $\begin{cases} 2x^2-5xy-y^2=4 \\ x^2-5xy+6y^2=1 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\pm\dfrac{5\sqrt{6}}{6},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}\right]$

20 $\begin{cases} x^2+2xy+11y^2=10 \\ x^2-9y^2=2 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\pm\dfrac{4\sqrt{14}}{7},\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right);\left(\pm\dfrac{7\sqrt{26}}{13},\mp\dfrac{2\sqrt{26}}{13}\right)\right\}\right]$

21 $\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=13 \\ (x+y)^2-2y(x+y)=3 \end{cases}$ $[S=\{(\pm 2,\ \pm 1)\}]$