APPROFONDIMENTO

Le successioni e il calcolo di π

I numeri reali si dividono in due grandi categorie, i **numeri algebrici** e i **numeri trascendenti**:

- i numeri algebrici sono quei numeri che possono essere visti come soluzione di un'equazione polinomiale;
- i numeri trascendenti sono i numeri che non sono algebrici.

Il più famoso numero trascendente è π, il quale è definito come il rapporto tra lunghezza ℓ di una circonferenza e il suo diametro d:

$$\pi = \frac{\ell}{d}$$

Questo numero ricorre in tante formule che riguardano la matematica ma anche altri campi, come per esempio la fisica; tra quelle che segnaliamo di seguito alcune ti sono già note, altre imparerai a conoscerle nel corso dei tuoi studi:

- area del cerchio di raggio r: $A = \pi r^2$
- volume di una sfera di raggio r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- volume di un cilindro di raggio r e altezza h: $V = \pi r^2 h$
- periodo di oscillazione un pendolo di lunghezza ℓ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- modulo della velocità nel moto circolare uniforme di raggio r e periodo T: $v = \frac{2\pi r}{T}$
- forza che si esercita tra due cariche elettriche q_1 e q_2 che si trovano nel vuoto a distanza r una dall'altra:
  $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (ε_0 costante dielettrica nel vuoto)

Il numero π è anche legato a uno dei grandi problemi dell'antichità, quello della **quadratura del cerchio**:

> trovare il lato ℓ di un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio di raggio r.

Dal punto di vista algebrico non si tratta di un problema di difficile soluzione:

- l'area del cerchio è πr^2
- l'area del quadrato è ℓ^2

e deve essere: $\ell^2 = \pi r^2$ da cui $\ell = r\sqrt{\pi}$.

Il problema è che la lunghezza $r\sqrt{\pi}$ non si può trovare con riga e compasso perché π è trascendente.

Del numero π possiamo solo trovare un valore approssimato e sappiamo che l'approssimazione a 3,14 è già sufficiente per la maggior parte dei calcoli che si devono fare nelle situazioni più comuni.

Isaac Asimov (1920-1992), noto scrittore statunitense di origine russa laureato in chimica e in filosofia, scrisse una volta che, se l'universo fosse sferico e avesse un diametro di 80 000 milioni di anni luce, basterebbe usare

un'approssimazione di π con 35 cifre decimali per commettere un errore nella valutazione dell'equatore celeste (cioè la lunghezza della circonferenza massima) inferiore a un milionesimo di centimetro.
Oggi si conosce un numero veramente grande di cifre decimali di π; è stato calcolato che, partendo da un punto dell'equatore terrestre e scrivendo una dietro l'altra le cifre di π che oggi si conoscono, si potrebbe percorrere più di 500 volte il giro del mondo! E allora perché continuare a cercare queste cifre? In realtà la determinazione delle cifre decimali di π si usa come test per determinare la potenza di un computer: più in fretta e in modo esatto la macchina riesce a calcolarle, più è potente.

Ma come si fa a calcolare le cifre decimali di π?
Esistono molte formule che risolvono questo problema, alcune delle quali non sono alla nostra portata. Quella che presentiamo di seguito si basa sulla determinazione dei perimetri dei poligoni regolari inscritti nella circonferenza e, anche se la presentiamo in modo diverso, prende spunto dal metodo costruito da Archimede nel III secolo a.C.
Subito dopo cercheremo di risolvere il problema utilizzando il concetto di probabilità.

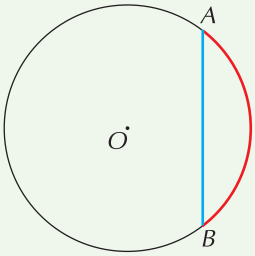
La determinazione di π con i poligoni inscritti

Sappiamo dalla geometria che (***figura 1***):

ogni arco di circonferenza ha lunghezza maggiore della corda che lo sottende

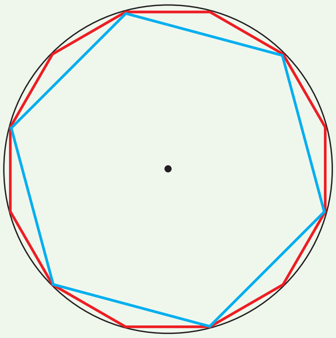
$$\overset{\frown}{AB} > \overline{AB}$$

Figura 1



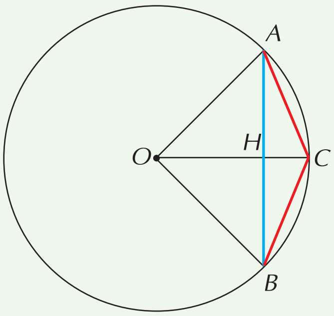
Questo significa che la lunghezza di una circonferenza è maggiore del perimetro di ogni poligono in essa inscritto.
Consideriamo allora un poligono di n lati inscritto in una circonferenza di raggio unitario e, per comodità, consideriamo un poligono regolare. Al crescere del numero dei lati, i perimetri di questi poligoni approssimano sempre meglio la lunghezza della circonferenza (***figura 2***); se allora consideriamo la successione dei perimetri dei poligoni regolari inscritti, si può dimostrare che tale successione è superiormente limitata dalla lunghezza della circonferenza.

Figura 2



Per costruire questa successione facciamo in modo che il numero di lati raddoppi ogni volta; per esempio, se come primo poligono consideriamo l'esagono regolare, quello successivo sarà il poligono di 12 lati, quello successivo ancora avrà 24 lati e così via.
Cerchiamo adesso di stabilire una relazione fra il lato del poligono di n lati e quello di $2n$ lati. Sia AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati (***figura 3***); per ottenere il lato del poligono di $2n$ lati basta prendere il punto medio C dell'arco AB: il lato di questo secondo poligono è AC. Se indichiamo con ℓ_n la lunghezza di AB, abbiamo che:

Figura 3



- $\overline{AH} = \dfrac{1}{2}\ell_n$
- $\overline{OH} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}\ell_n^2}$

  per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OHA (il raggio della circonferenza è unitario)
- $\overline{HC} = \overline{OC} - \overline{OH} = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}\ell_n^2}$

- $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\ell_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\ell_n^2}\right)^2}$

  per il teorema di Pitagora applicato al triangolo *AHC*

Svolgendo i calcoli in modo opportuno su quest'ultima espressione, troviamo che

$$\overline{AC} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$$

Dunque, se adesso indichiamo con ℓ_{2n} la lunghezza di AC, cioè del lato del poligono inscritto di $2n$ lati, abbiamo che

$$\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$$

che è la relazione che stavamo cercando.

Per esempio, se $n = 6$, ℓ_n è il lato dell'esagono regolare inscritto e si ha che $\ell_6 = r = 1$; allora

$$\ell_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}51763809$$

Conoscendo adesso la misura di ℓ_{12} possiamo trovare quella di ℓ_{24}

$$\ell_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0{,}51763809^2}} \approx 0{,}261052384$$

e così via.

Il perimetro del poligono di $2n$ lati si ottiene moltiplicando per $2n$ la lunghezza del lato; possiamo quindi dire che

$$\text{perimetro} = 2n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$$

Al crescere di n, il perimetro di questi poligoni si avvicina sempre di più alla lunghezza della circonferenza, cioè, considerando che abbiamo posto $r = 1$, a 2π. Questo vuol dire che il semiperimetro, che indichiamo con P_{2n} si avvicina sempre di più a π.
La successione dei semiperimetri dei poligoni inscritti in una circonferenza di raggio unitario può essere definita per ricorrenza a partire per esempio dal semiperimetro P_6 dell'esagono in questo modo:

$$\begin{cases} P_6 = 3 \\ P_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}} \end{cases}$$

I termini di questa successione si possono generare in modo semplice con un foglio di Excel; alcuni di essi sono riportati nella tabella che segue:

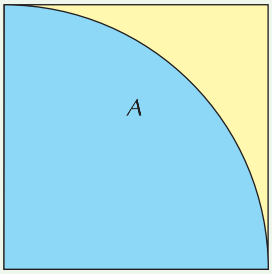
n. lati	6	12	24	48	96	192	384
p	3	3,105828541	3,132628613	3,139350203	3,141031951	3,141452472	3,141557608

I valori ottenuti sono tutti valori approssimati per difetto di π e si nota subito che, già alla quinta iterazione, si ottengono tre cifre decimali stabili, con la quarta cifra ancora incerta.

Un metodo probabilistico

Un altro metodo, più "sperimentale", per il calcolo di π è legato al concetto di probabilità. Consideriamo un quadrato ed il quarto di cerchio A in esso inscritto come in ***figura 4***. Supponiamo di lanciare a caso delle freccette e che queste abbiano la stessa probabilità di cadere in un punto qualsiasi del quadrato.

Figura 4



Sia f il numero di freccette che è caduto in A su n lanci effettuati.

Il numero $p = \dfrac{f}{n}$ rappresenta la probabilità che una freccetta, lanciata a caso all'interno del quadrato, cada nel quarto di cerchio. Tale valore, al crescere del numero dei lanci, tende al rapporto

$$\frac{\text{area di } A}{\text{area del quadrato}} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = \frac{1}{4}\pi$$

Quindi, per n molto grande, il rapporto $\dfrac{f}{n}$ si avvicina a $\dfrac{1}{4}\pi$, quindi π si avvicina al rapporto $4 \cdot \dfrac{f}{n}$.

Puoi anche simulare al computer questo esperimento con un foglio di Excel e verificare quanto esposto.