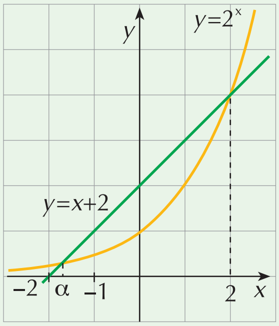
APPROFONDIMENTO

Equazioni e disequazioni per via grafica

Alcune equazioni o disequazioni esponenziali non possono essere risolte per via algebrica ed è necessario ricorrere a metodi grafici.

Primo esempio

$2^x - 2 = x$



Riscriviamo dapprima l'equazione in modo da separare la parte esponenziale da quella polinomiale $2^x = x + 2$.
Come abbiamo già fatto in altri casi, possiamo pensare che tale equazione sia l'equazione risolvente di un sistema, e precisamente di

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2^x \end{cases}$$

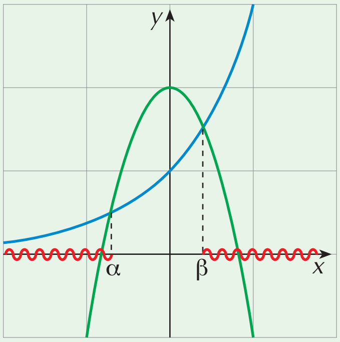
Dal punto di vista grafico, questo sistema rappresenta l'intersezione della curva esponenziale di equazione $y = 2^x$ con la retta di equazione $y = x + 2$ (figura a lato).
L'osservazione del grafico delle due curve nello stesso piano cartesiano indica che ci sono due soluzioni reali:

- la prima, indicata con α sul grafico, ha valore negativo compreso fra -2 e -1
- la seconda sembra essere uguale a 2.

Per essere certi che la seconda soluzione sia proprio 2 basta eseguire una verifica: sostituendo 2 al posto dell'incognita nell'equazione iniziale, otteniamo $2^2 - 2 = 2$ che è vera.
L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{\alpha, 2\}$, essendo $-2 < \alpha < -1$; per una valutazione più precisa di α si può ricorrere ad un software come Wiris o GeoGebra.

Secondo esempio

$1 - 3x^2 \leq 3^x - 1$



Riscriviamo la disequazione nella forma $2 - 3x^2 \leq 3^x$ e confrontiamo i grafici delle funzioni $y = 2 - 3x^2$ e $y = 3^x$ (figura a lato).
La prima funzione è una parabola, la seconda è una curva esponenziale elementare; esse si intersecano nei punti di ascissa α, β dove

$$-1 < \alpha < 0 \qquad \text{e} \qquad 0 < \beta < 1$$

Poiché vogliamo che la parabola sia "minore o uguale" della curva esponenziale, le soluzioni della disequazione sono i valori di x tali che

$$x \leq \alpha \ \vee \ x \geq \beta$$

Esercizi

Equazioni

1 Per risolvere graficamente l'equazione $2^{x-3}+x^2-4=0$ occorre confrontare le due funzioni:

a. $f(x)=2^{x-3}$ e $g(x)=x^2-4$

b. $f(x)=2^{x-3}$ e $g(x)=4-x^2$

c. $f(x)=x^2-4$ e $g(x)=2^{3-x}$

d. nessuna delle precedenti. [**b.**]

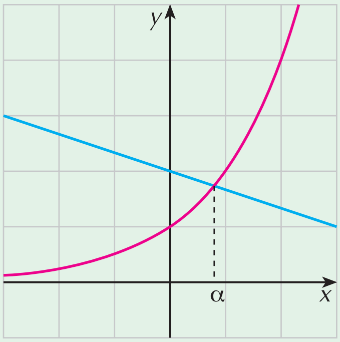
2 **ESERCIZIO GUIDATO**

$2^x+\frac{1}{3}x-2=0$

Separiamo la parte esponenziale e riscriviamo l'equazione in questo modo: $2^x=-\frac{1}{3}x+2$

Confrontiamo i grafici delle funzioni: $y=2^x$ e $y=-\frac{1}{3}x+2$

Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa α, con $0<\alpha<1$.



3 $2^x+3x=0$ $[S=\{\alpha\}$, con $-1<\alpha<0]$

4 $2^x-\frac{1}{2}x=0$ $[S=\varnothing]$

5 $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2x-1=0$ $[S=\{0,\alpha\}$, con $-3<\alpha<-2]$

6 $1-x^2-3^x=0$ $[S=\{0,\alpha\}$, con $-1<\alpha<0]$

7 $x^2-x-2^x=0$ $[S=\{\alpha\}$, con $-1<\alpha<0]$

8 $\left(\frac{2}{3}\right)^x+1=x^2$ $[S=\{\alpha,\beta\}$, con $-2<\alpha<-1$ e $1<\beta<2]$

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

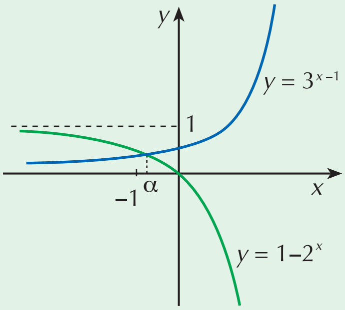
$3^{x-1}+2^x-1=0$

Riscriviamo l'equazione nella forma $3^{x-1}=1-2^x$

e confrontiamo i grafici delle funzioni di equazioni

$y=3^{x-1}$ e $y=1-2^x$

Le due curve si intersecano nel punto di ascissa α con $-1<\alpha<0$; l'equazione ha dunque soluzione $x=\alpha$.



10 $\left(\frac{2}{3}\right)^x-2^{x+2}-1=0$ $[S=\{\alpha\}$, con $-2<\alpha<-1]$

11 $e^{-x} + 2^x - 3 = 0$ $[S = \{\alpha, \beta\}$, con $-1 < \alpha < 0 \ \wedge \ 1 < \beta < 2]$

12 $3^x + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 0$ $[S = \varnothing]$

13 $2^{x+1} - 3^{1-x} = 1$ $[S = \{\alpha\}$, con $0 < \alpha < 1]$

Disequazioni

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni esponenziali (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

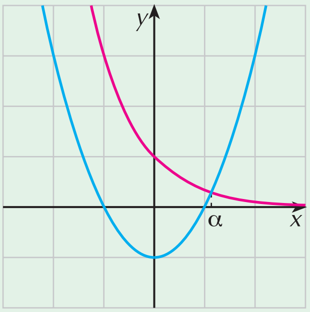
14 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > x^2 - 1$

Costruiamo i grafici delle funzioni $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = x^2 - 1$ e confrontiamoli.

Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa α, con $1 < \alpha < 2$.

La curva esponenziale è "minore" della parabola se $x > \alpha$.



15 $2^x - 4 > \frac{1}{2}x$ $[x < \alpha \ \vee \ x > \beta$, con $-8{,}5 < \alpha < -7{,}5 \ \wedge \ 2 < \beta < 3]$

16 $2^{x-3} - x < 0$ $\left[\alpha < x < \beta\text{, con } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \ \wedge \ 5 < \beta < 6\right]$

17 $e^{3-x} \geq x^2 - x + 2$ $[x < \alpha$, con $1{,}5 < \alpha < 2]$

18 $x^2 - 3x > e^{2x-1}$ $\left[x < \alpha\text{, con } -\frac{1}{2} < \alpha < 0\right]$

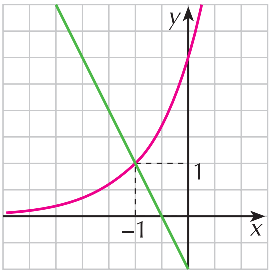
19 $e^x \leq 2 - x$ $[x \leq \alpha$, con $0 < \alpha < 1]$

20 $1 - 2^{-x} \geq x$ $[-1 \leq x \leq 0]$

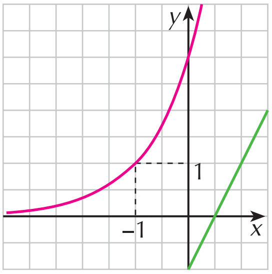
21 $3^{-x} + 3^x > 4$ $[x < \alpha \ \vee \ x > \beta$, con $-1{,}5 < \alpha < -1 \ \wedge \ 1 < \beta < 1{,}5]$

22 $e^{2-x} > 1 + 2^{-x}$ $[x < \alpha$, con $1{,}5 < \alpha < 2]$

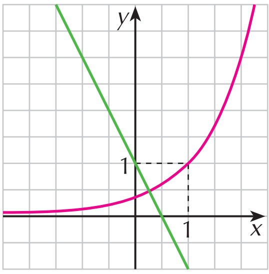
23 Quale fra i seguenti grafici permette di individuare le soluzioni della disequazione $3^{x-1} + 2x - 1 < 0$?



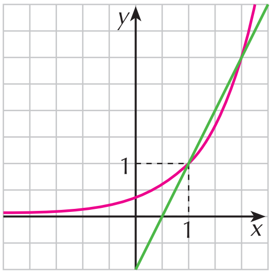
a.



b.



c.



d.

[**c.**]