

LOGICA E CONNETTIVI

PREREQUISITI

- conoscere gli insiemi e il loro linguaggio
- conoscere il significato di soggetto e predicato di una frase
- conoscere il significato di congiunzione, disgiunzione e negazione di una frase
- conoscere il concetto di operazione

CONOSCENZE

1. le proposizioni
2. i connettivi logici
3. le espressioni logiche

ABILITÀ

- A. compilare una tavola di verità usando i connettivi logici
- B. calcolare il valore di verità di espressioni logiche

PER RICORDARE

La logica e i connettivi:

1. la **logica** è un ramo della matematica che studia le regole per effettuare ragionamenti;
2. una **proposizione** è una frase semplice nella quale si afferma qualcosa in modo chiaro e univoco; di una proposizione si può sempre affermare con precisione se è **vera** o se è **falsa**;
3. i **valori di verità** di una proposizione sono vero o falso;
4. il connettivo logico **negazione** si indica con un trattino sopra la lettera della proposizione; la negazione di una proposizione p è una proposizione che è vera quando p è falsa ed è falsa quando p è vera;
5. il connettivo logico **congiunzione** si indica con il simbolo \wedge ; la proposizione congiunzione $p \wedge q$ è vera se e solo se p e q sono vere;
6. il connettivo logico **disgiunzione** si indica con il simbolo \vee ; la proposizione disgiunzione $p \vee q$ è vera se sono vere entrambe o se è vera almeno una delle proposizioni che la compongono;
7. per calcolare il **valore di verità** di una espressione logica occorre seguire le seguenti regole:
 - a. la negazione ha la precedenza sulle altre proposizioni;
 - b. le operazioni si eseguono nell'ordine con cui sono scritte;
 - c. le parentesi si risolvono seguendo lo stesso ordine delle espressioni numeriche.

ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1 Indica quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche:
 - a. il dollaro è la moneta degli Stati Uniti d'America;
 - b. il gatto è un felino;
 - c. il numero 15 è divisibile per 3;

- a. il piatto più buono è la pastasciutta;
- b. la capitale dell'Italia è Genova.

Svolgimento

- a. La frase «il piatto più buono è la pastasciutta» non è una proposizione logica perché non è possibile stabilire se è universalmente una frase vera oppure è falsa: ci sono persone per cui tale frase è vera altre per cui è falsa.
- b. La frase «la capitale dell'Italia è Genova» è una proposizione logica perché è possibile stabilire se è vera oppure è falsa: chiunque infatti direbbe che è falsa.

2 Stabilisci quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche:

- a. la matematica è la materia più difficile;
- b. l'elefante è l'animale più piccolo che esista;
- c. il computer serve per camminare;
- d. la macchina è più comoda del motorino;
- e. la mela è un frutto.

3 *Esercizio Suelto*

Le proposizioni composte

Stabilisci quali delle seguenti proposizioni sono proposizioni composte:

- a. «la mia casa ha cinque stanze»;
- b. «Marco e Mara hanno dieci anni»;
- c. «Luca o Stefano verrà interrogato in matematica».

Svolgimento

Solo le proposizioni **b.** «Marco e Mara hanno dieci anni» e **c.** «Luca o Stefano verrà interrogato in matematica» sono proposizioni composte perché sono combinate dai connettivi logici congiunzione (la **b.** \wedge) e disgiunzione (la **c.** \vee).

4 Stabilisci quali delle seguenti proposizioni sono proposizioni composte:

- a. «oggi vado al cinema e compro un libro»;
- b. «Claudio mangia un'albicocca e una pesca»;
- c. «il film che ho visto è durato due ore»;
- d. «10 è il doppio di 5»;
- e. «6 è multiplo di 2 e di 3».

5 *Esercizio Suelto*

La scomposizione di proposizioni composte

Scomponi le seguenti proposizioni composte nelle proposizioni che le compongono:

- a. «il libro di italiano ha la copertina blu o quello di storia ha 150 pagine»;
- b. «40 è multiplo di 20 ed è un numero pari».

Svolgimento

- a. Le due proposizioni sono p : «il libro di italiano ha la copertina blu» e q : «il libro di storia ha 150 pagine»; sono legate dal connettivo "o" (\vee);
- b. le due proposizioni sono r : «40 è multiplo di 20» e s : «40 è un numero pari»; sono legate dal connettivo "e" (\wedge).

6 Scomponi le seguenti proposizioni composte nelle proposizioni che le compongono:

- a. «6 è un numero pari o è un numero divisibile per 5»;
- b. «la parola *Milano* è composta da 4 lettere e inizia con la lettera M».

7 *Esercizio Svolto*

La negazione di una proposizione

Date le seguenti proposizioni, scrivi le loro negazioni e stabilisci poi se sono vere o false:

- a. p : «Roma è la capitale dell'Italia»;
- b. q : «7 è il doppio di 3»;
- c. r : «il risultato della somma tra 2 e 5 è 7».

Svolgimento

- a. \bar{p} : «Roma non è la capitale dell'Italia»;
- b. \bar{q} : «7 non è il doppio di 3»;
- c. \bar{r} : «il risultato della somma tra 2 e 5 non è 7».

La proposizione p è vera, dunque \bar{p} è falsa; la proposizione q è falsa, quindi \bar{q} è vera; la proposizione r è vera, quindi \bar{r} è falsa.

8 Date le seguenti proposizioni, scrivi le loro negazioni e stabilisci poi se sono vere o false:

- a. p : «2 è un numero primo»;
- b. q : «Leopardi è nato a Recanati»;
- c. r : «6 è il successivo di 7».

9 Date le proposizioni p : «15 è multiplo di 3» e q : «7 è un numero primo», costruisci la proposizione composta $p \wedge q$ e stabilisci se è vera o falsa.

10 Date le proposizioni p : «18 è multiplo di 2» e q : «144 è il quadrato di 13», costruisci la proposizione composta $p \wedge q$ e stabilisci se è vera o falsa.

11 Date le proposizioni p : «Firenze è in Toscana» e q : «Aosta è in Piemonte», costruisci la proposizione composta $p \vee q$ e stabilisci se è vera o falsa.

12 Date le proposizioni p : «la Bulgaria è in Asia» e q : «la moneta inglese è il dollaro», costruisci la proposizione composta $p \vee q$ e stabilisci se è vera o falsa.

13 Date le proposizioni p : «4 è un numero primo» e q : «il delfino è un mammifero», costruisci le proposizioni composte $p \vee q$ e $p \wedge q$ e stabilisci se sono vere o false.

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO MEDIO **

1 *Esercizio Guidato*

La negazione della negazione di una proposizione e la verifica del valore di verità

Data la proposizione p : «7 è un numero dispari», scrivi la sua negazione e la negazione della negazione e stabilisci poi il valore di verità di \bar{p} e $\overline{\bar{p}}$.

Svolgimento

- \bar{p} : «7 non è un numero dispari».
- $\overline{\bar{p}}$: «non è vero che 7 dispari».

Stabilisci da solo il valore di verità delle proposizioni \bar{p} e $\overline{\bar{p}}$.

2 Data la proposizione p : «Brescia è una provincia della Liguria», scrivi la sua negazione e la negazione della negazione e stabilisci poi il valore di verità di \bar{p} e $\overline{\bar{p}}$.

3 *Esercizio Guidato*

La tabella di verità con il connettivo logico di congiunzione

Date le proposizioni p : «il libro di inglese è composto da 10 unità» e q : «il libro di inglese ha 145 pagine», scrivi la proposizione composta $p \wedge q$ e compila la relativa tabella di verità.

Svolgimento

$p \wedge q$: «..... ed

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	...
F	V	...
F	F	...

- 4 Date le proposizioni p : «5 è sottomultiplo di 10» e q : «5 è un numero primo», scrivi la proposizione composta $p \wedge q$ e compila la tabella di verità.

5 *Esercizio Guidato*

La tabella di verità con il connettivo logico di disgiunzione

Date le proposizioni p : «Matteo frequenta la classe terza» e q : «Matteo porta gli occhiali», scrivi la proposizione composta $p \vee q$ e compila la relativa tabella di verità.

Svolgimento

$p \vee q$: «Matteo frequenta la classe terza porta

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	...
F	V	V
F	F	...

- 6 Date le proposizioni p : «il cielo è sereno» e q : «il vestito è rosa», scrivi la proposizione composta $p \vee q$ e compila la relativa tabella di verità.

- 7 Calcola il valore di verità delle seguenti espressioni logiche:

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \wedge q$	$p \vee \bar{q}$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- 8
- | p | q | \bar{q} | $p \vee \bar{q}$ | $p \wedge (p \vee \bar{q})$ |
|-----|-----|-----------|------------------|-----------------------------|
| V | V | | | |
| V | F | | | |
| F | V | | | |
| F | F | | | |

9 Considera le seguenti proposizioni:

p : «il quadrato ha tre lati»;

q : «il triangolo non ha diagonali»;

r : «il triangolo è un poligono»;

s : «il triangolo ha due altezze».

Dopo aver individuato il valore di verità di ciascuna di esse, risolvi le seguenti espressioni logiche:

a. $p \wedge q \vee \bar{r} \vee \bar{s}$;

b. $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee s)$;

c. $[(\bar{p} \vee q) \wedge r] \vee \bar{s}$.

ESERCIZI DI ABILITÀ \Rightarrow LIVELLO AVANZATO ***

1 Date le proposizioni p : «8 è il prodotto tra 2 e 4» e q : «4 è un numero primo», stabilisci il valore di verità:

a. delle due proposizioni;

b. della proposizione \bar{p} ;

c. della proposizione \bar{q} .

2 Date le proposizioni p : «Il cane è un mammifero» e q : «Il gatto miagola», stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a. $p \wedge q$;

b. $p \vee q$;

c. $\bar{p} \vee q \wedge p$;

d. $(\bar{q} \vee \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{p})$.

3 Completa le seguenti tavole di verità:

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \wedge q$	$\overline{\bar{p} \wedge q}$	$\overline{\bar{p} \wedge q} \vee p$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

4

a	b	c	\bar{b}	$a \vee \bar{b}$	$c \vee (a \vee \bar{b})$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

5 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni supponendo che:

$a = \text{Vero}$; $b = \text{Vero}$; $c = \text{Falso}$; $d = \text{Vero}$.

$(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee d)$.

6 Dopo aver stabilito il valore di verità delle proposizioni:

q : «30 è un multiplo di 3»;

p : «Napoli è il capoluogo della Toscana»;

r : «la rana è un anfibio»;

calcola il valore di verità della seguente espressione logica: $[r \vee q \wedge (\bar{q} \wedge r) \vee (p \vee q \wedge \bar{r})] \wedge \bar{r}$.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

1 a., b., c., h.

2 b.

3 V o F.

4

p	\bar{p}
V	F
F	V

5 V.

6

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

7 a. V; b. F; c. F.

8 sono vere entrambe, almeno una.

9 a. V; b. F; c. V.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO BASE

2 b.; c.; e.

4 a.; b.; e.

6 a. p : «6 è un numero pari»; q : «6 è un numero divisibile per 5»;

b. r : «la parola *Milano* è composta da 4 lettere»; s : «la parola *Milano* inizia con la lettera M».

8 a. \bar{p} : «2 non è un numero primo»; p è vera; \bar{p} è falsa;

b. \bar{q} : «Leopardi non è nato a Recanati»; q è vera; \bar{q} è falsa;

c. \bar{r} : «6 non è il successivo di 7»; r è falsa; \bar{r} è vera.

9 V.

10 F.

11 V.

12 F.

13 $p \vee q = V$; $p \wedge q = F$.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO MEDIO

1 $\bar{\bar{p}}$: «non è vero che 7 non è un numero dispari»; p è vera; \bar{p} è falsa; $\bar{\bar{p}}$ è vera.

2 \bar{p} : «Brescia non è una provincia della Liguria»;

$\bar{\bar{p}}$: «non è vero che Brescia non è una provincia della Liguria»;

p è falsa; \bar{p} è vera; $\bar{\bar{p}}$ è falsa.

3 $p \wedge q$: «il libro di inglese è composto da 10 unità ed ha 145 pagine»;

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4 $p \wedge q$: «5 è sottomultiplo di 10 ed è un numero primo». La tabella di verità è identica a quella dell'esercizio precedente.

5 $p \vee q$: «Matteo frequenta la classe terza oppure porta gli occhiali».

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6 $p \vee q$: «il cielo è sereno oppure il vestito è rosa». La tabella di verità è identica a quella dell'esercizio precedente.

7

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \wedge q$	$p \vee \bar{q}$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V

8

p	q	\bar{q}	$p \vee \bar{q}$	$p \wedge (p \vee \bar{q})$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F

9 a. V; b. F; c. V.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO AVANZATO

1 a. p è vera, q è falsa; b. F; c. F.

2 a. V; b. V; c. V; d. F.

3

p	q	\bar{p}	$\bar{\bar{p}}$	$\bar{\bar{p}} \wedge q$	$\bar{\bar{\bar{p}}} \wedge \bar{q}$	$\bar{\bar{\bar{p}}} \wedge \bar{q} \vee p$
V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V

4

a	b	c	\bar{b}	$a \vee \bar{b}$	$c \vee (a \vee \bar{b})$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

5 falso.

6 falso.