

LE RELAZIONI

PREREQUISITI

- conoscere e operare con gli insiemi
- conoscere e operare con le principali figure piane
- conoscere e operare con gli insiemi e le corrispondenze tra insiemi

CONOSCENZE

1. le relazioni
2. il dominio e il codominio di una relazione
3. l'inversa di una relazione
4. le proprietà di una relazione in un insieme
5. le relazioni di equivalenza e di ordine

ABILITÀ

- A. definire una relazione e saperla rappresentare
- B. definire l'inversa di una relazione e rappresentarla
- C. individuare le proprietà di una relazione
- D. riconoscere le relazioni di equivalenza e di ordine

PER RICORDARE

Le relazioni tra due insiemi:

1. tra due insiemi A e B si stabilisce una **corrispondenza** quando si individua una proprietà che associa agli elementi di A gli elementi di B ;
2. una **relazione** \mathcal{R} tra due insiemi A e B permette di associare gli elementi appartenenti ad A con gli elementi appartenenti a B ;
3. le **relazioni** si possono rappresentare **in forma sagittale** mediante una freccia che collega gli elementi di A con quelli di B oppure mediante una **tabella a doppia entrata**;
4. il **dominio** di una relazione \mathcal{R} da A verso B è il sottoinsieme di A formato da tutti gli elementi cui è possibile applicare \mathcal{R} ;
5. il **codominio** di una relazione \mathcal{R} da A verso B è il sottoinsieme di B formato da tutti gli elementi che sono in relazione con un elemento di A ;
6. la **relazione inversa** di una relazione \mathcal{R} è tale da invertire l'ordine degli elementi che formano le coppie (a, b) .

Le relazioni nello stesso insieme:

7. si chiama **relazione** \mathcal{R} **in un insieme** A la proprietà che associa gli elementi di A con gli elementi di A stesso;
8. la rappresentazione di una relazione \mathcal{R} in un insieme A si può effettuare mediante una **tabella a doppia entrata** o tramite la **forma sagittale**;
9. una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice **riflessiva** quando ogni elemento x appartenente ad A è in relazione con se stesso;
10. una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice **antiriflessiva** quando nessun elemento x appartenente ad A è in relazione con se stesso;
11. una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice **simmetrica** quando considerati due elementi x e y appartenenti ad A ogni volta che x è in relazione con y , allora y è in relazione con x ;

12. una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice **transitiva** quando considerati tre elementi x, y e z appartenenti ad A , ogni volta che x è in relazione con y e y è in relazione con z , anche x è in relazione con z ;
13. una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice **antisimmetrica** quando, considerati due elementi qualunque x e y appartenenti ad A , possono sussistere contemporaneamente $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$ solo se $x = y$ oppure, detto in altri termini, quando dati due elementi qualunque x e y appartenenti all'insieme A con $x \neq y$, se x è in relazione con y non succede che y è in relazione con x .

Le proprietà delle relazioni:

14. una relazione è di **equivalenza** quando gode delle proprietà **riflessiva, simmetrica e transitiva**;
15. una relazione è di **ordine** quando gode delle proprietà **transitiva e antisimmetrica**;
16. le relazioni d'ordine si dividono in:
- **ordine largo** se \mathcal{R} gode anche della proprietà **riflessiva**;
 - **ordine stretto** se \mathcal{R} gode anche della proprietà **antiriflessiva**;
17. una relazione è di **ordine totale o parziale** a seconda che tutte (o non tutte) le coppie degli elementi di un insieme si possono confrontare tra loro tramite la relazione \mathcal{R} .

ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1 Completa la seguente definizione:
quando tra due insiemi A e B si individua una che permette di associare gli elementi di A con gli elementi di B si dice che tra i due insiemi si è stabilita una
- 2 Si chiama relazione \mathcal{R} tra due insiemi A e B la proprietà che associa:
- a. gli elementi appartenenti ad A con qualche elemento appartenente a B ;
 - b. gli elementi appartenenti ad A con gli elementi appartenenti a B ;
 - c. gli elementi appartenenti a B con qualche elemento appartenente ad A .
- 3 Indica in quali modi si può rappresentare una relazione \mathcal{R} tra due insiemi o tra gli elementi dello stesso insieme.
- 4 Considera gli insiemi $A = \{\text{vino; birra; pane}\}$ e $B = \{\text{farina; uva; sale; aceto}\}$ e la relazione \mathcal{R} da A verso B individuata dalla frase: «... si prepara con ...». Indica qual è il sottoinsieme che rappresenta il dominio e quale sottoinsieme rappresenta il codominio.
- 5 Quando in una relazione \mathcal{R} si inverte l'ordine degli elementi che formano le coppie (a, b) la relazione si chiama:
- a. inversa e si indica con $\frac{1}{\mathcal{R}}$;
 - b. opposta e si indica con $-\mathcal{R}$;
 - c. esponenziale e si indica con \mathcal{R}^2 .
- 6 Completa la seguente frase:
si chiama relazione \mathcal{R} in un insieme A la che associa gli elementi di A con gli
- 7 Una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice riflessiva quando:
- a. per ogni elemento x appartenente ad A esiste un elemento y appartenente ad A tale che x è in relazione con y ;
 - b. ogni elemento x appartenente ad A è in relazione con se stesso;
 - c. esistono elementi x appartenenti ad A tali che x non è in relazione con se stesso.

- 8** Completa le seguenti definizioni:
- una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice se nessun elemento x di A è in relazione con se stesso;
 - una relazione \mathcal{R} in un insieme A si dice simmetrica quando considerati due elementi x e y appartenenti ad A ogni volta che x è, allora anche y è
 - una relazione \mathcal{R} definita in un insieme A si dice transitiva se: $\forall x, y, z \in \dots$ se $x \mathcal{R} \dots$ e $y \mathcal{R} \dots \Rightarrow \dots \mathcal{R} z$.
- 9** Che tipo di relazione rappresenta la seguente scrittura simbolica?
 $\forall x, y \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$.
- 10** Una relazione \mathcal{R} si dice di equivalenza se gode contemporaneamente delle proprietà:
- riflessiva, simmetrica;
 - antiriflessiva, simmetrica;
 - riflessiva, simmetrica, transitiva;
 - simmetrica, transitiva;
 - transitiva, antisimmetrica.
- 11** Sia dato l'insieme $A = \{\text{casa; ala; nave; neo; vino; algebra; caserma}\}$ e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... ha lo stesso numero di lettere di ...». Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di indica quali delle seguenti scritte sono vere e quali sono false:
- $\forall x, y, z \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
 - $\forall x, y \in A$ se $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
 - $\forall x \in A, x \mathcal{R} x$
 - $\forall x, y \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
- | | |
|---|---|
| V | F |
| V | F |
| V | F |
| V | F |
- 12** Completa le seguenti definizioni:
- una relazione \mathcal{R} definita in un insieme A si dice relazione d'ordine quando gode contemporaneamente delle proprietà
 - una relazione d'ordine si dice d'ordine largo se gode anche della, si dice d'ordine stretto se gode anche della

ESERCIZI DI ABILITÀ \Rightarrow LIVELLO BASE *

1 *Esercizio Svolto*

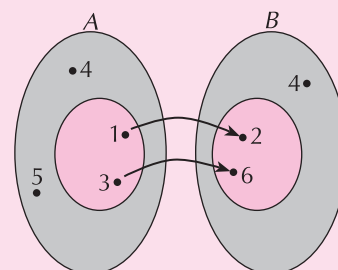
La rappresentazione di una relazione

Siano dati gli insiemi $A = \{1; 3; 4; 5\}$ e $B = \{2; 4; 6\}$. Determina il grafico della relazione \mathcal{R} da A verso B collegando ogni numero con il suo doppio. Quali sono il dominio e il codominio della relazione?

Svolgimento

Il grafo della relazione \mathcal{R} è rappresentato a lato. In esso abbiamo colorato con tonalità diverse il dominio e il codominio; in particolare:

- il dominio è rappresentato dagli elementi di A da cui parte almeno una freccia: 1; 3
- il codominio è rappresentato dagli elementi di B cui arriva almeno una freccia: 2; 6.



- 2 Dati gli insiemi $A = \{\text{Mantova; Milano; Asti; Catania; Napoli; Bari; Roma}\}$ e $B = \{\text{Sardegna; Umbria; Piemonte; Puglia; Lazio; Sicilia; Lombardia}\}$. Determina il grafico della relazione \mathcal{R} da A verso B collegando ogni città con la regione di appartenenza. Quali sono il dominio e il codominio della relazione?

3 *Esercizio Svolto*

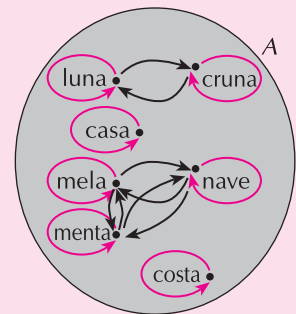
Le proprietà di una relazione

Sia dato l'insieme $A = \{\text{luna; casa; cruna; mela; nave; menta; costa}\}$. Considera la relazione \mathcal{R} in A espressa dalla frase «... ha le stesse vocali di ...». Rappresenta la relazione \mathcal{R} in A mediante un grafo e indica le proprietà di cui gode la relazione stessa.

Svolgimento

Dal grafo della nostra relazione \mathcal{R} deduciamo che:

- la relazione gode della proprietà riflessiva in quanto ogni parola è in relazione con se stessa;
- la relazione gode della proprietà simmetrica in quanto se una parola ha le stesse vocali di un'altra, anche quest'ultima ha le stesse vocali della prima;
- la relazione gode della proprietà transitiva in quanto se una prima parola ha le stesse vocali di una seconda parola e quest'ultima ha le stesse vocali di una terza parola, allora la prima parola ha le stesse vocali dell'ultima.



- 4 Dato l'insieme A di tutti i cognomi degli alunni presenti nella tua scuola e la relazione \mathcal{R} in A espressa dalla frase «... ha lo stesso cognome di ...»; di quali proprietà gode la relazione stessa?

5 *Esercizio Svolto*

La relazione di equivalenza

Dato l'insieme $A = \{\text{cane; casa; albero; foglio; abete; colore; sale}\}$ indica le proprietà di cui gode la relazione \mathcal{R} definita dalla frase «... ha lo stesso numero di lettere di ...» e stabilisci se si tratta di relazione d'ordine o di equivalenza.

Svolgimento

La relazione \mathcal{R} gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Infatti ogni parola ha lo stesso numero di lettere di se stessa; se una parola ha lo stesso numero di lettere di un'altra, allora quest'ultima ha lo stesso numero di lettere della prima; se una parola ha lo stesso numero di lettere di una seconda parola e questa ha lo stesso numero di lettere di una terza parola, allora la prima ha lo stesso numero di lettere della terza.

Possiamo quindi concludere che la relazione è di equivalenza.

- 6 Dato l'insieme $A = \{\text{candela; abete; giostra; libro; zoccolo; rosa}\}$ e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... inizia con una lettera che nell'ordine dell'alfabeto italiano si trova prima di ...»; di che tipo di relazione si tratta?
- 7 Sia dato l'insieme $A = \{x/x \text{ è un abitante della Lombardia}\}$ e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... abita nella stessa provincia di ...»; di che tipo di relazione si tratta?
- 8 Considera l'insieme delle persone della tua famiglia e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... è parente di ...». In generale si può dire che la relazione è di ordine? Perché?
- 9 Considera l'insieme degli alunni della tua classe e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... è nato nello stesso mese di ...»; di che tipo di relazione si tratta?

10 Considera l'insieme delle 10 squadre di calcio giovanile che partecipano ad un torneo e, in riferimento alla classifica finale, considera la relazione \mathcal{R} definita dalla frase: «... segue in classifica ...». Di quali proprietà gode la relazione \mathcal{R} ? Che tipo di relazione è?

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO MEDIO **

1 *Esercizio Guidato*

La rappresentazione di una relazione

Sia dato l'insieme $A = \{2; 4; 6; 8\}$, descrivi per elencazione l'insieme B in modo che tra i due insiemi si stabilisca una relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... è il risultato della divisione per 3 di ...» e in modo che A non coincida col dominio. Rappresenta inoltre con un grafico sagittale la relazione ottenuta.

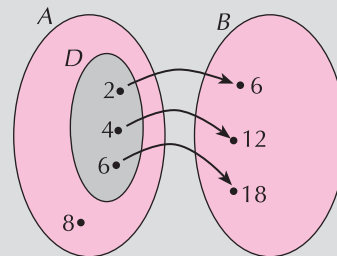
Svolgimento

Una possibile soluzione considera l'insieme B costituito dai seguenti elementi:

$$B = \{\dots\dots\dots; 12; \dots\dots\dots\}.$$

La rappresentazione della relazione è a lato.

Il dominio della relazione è $D = \{\dots\dots\dots\}$.



2 Sia dato l'insieme $A = \{9; 13; 3\}$ descrivi per elencazione l'insieme B formato da numeri dispari in modo che tra i due insiemi si stabilisca una relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... è il numero dispari consecutivo di ...». Rappresenta inoltre con un grafico sagittale la relazione ottenuta.

3 *Esercizio Guidato*

Le proprietà di una relazione

Sia dato l'insieme A formato dagli alunni della tua classe. Stabilisci di quali proprietà godono le relazioni:

- a. \mathcal{R}_1 definita dalla frase: «... ha la media dei voti raggiunti nel primo quadrimestre più alta di ...»;
- b. \mathcal{R}_2 definita dalla frase: «... ha la stessa altezza di ...».

Svolgimento

- a. la relazione \mathcal{R}_1 gode della proprietà antiriflessiva in quanto; la relazione gode della proprietà transitiva in quanto se media (a) media (b) e, anche media (a)
- la relazione gode della proprietà in quanto per ogni $a \neq b$ se media (a) > media (b) non può accadere che media (b)
- b. la relazione \mathcal{R}_2 gode della proprietà riflessiva in quanto ogni; la relazione gode della proprietà simmetrica in quanto se, anche
- la relazione gode della proprietà in quanto se e anche

4 Stabilisci di quale proprietà gode la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... x è il doppio di y ...» nell'insieme dei numeri razionali assoluti.

- 5 Considera il seguente insieme $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e la relazione \mathcal{R} in A rappresentata dalla seguente tabella a doppia entrata:

\mathcal{R}	1	2	3	4
1	X			
2		X	X	
3		X	X	
4				X

Stabilisci di quali proprietà gode la relazione \mathcal{R} in A .

6 *Esercizio Guidato*

Le principali relazioni

Sia dato l'insieme $A = \{4; 9; 250; 3700\}$ e la relazione \mathcal{R} espressa dalla frase: «... ha un numero di cifre minore di ...». Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di indica quali delle seguenti scritte sono vere e quali sono false:

- a. $\forall x, y, z \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
 b. $\forall x, y \in A$ se $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
 c. $\forall x \in A, x \mathcal{R} x$
 d. $\forall x, y \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

V	F
V	F
V	F
V	F

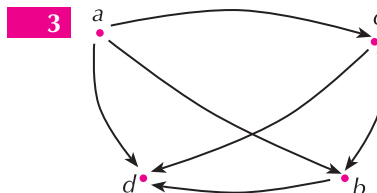
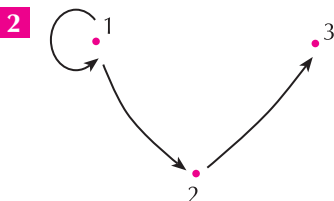
Stabilisci quali fra le seguenti sono relazioni di equivalenza e quali di ordine largo o stretto.

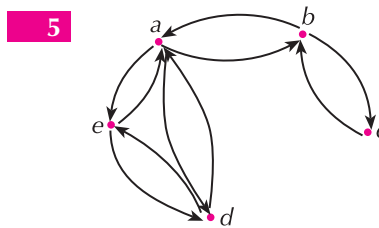
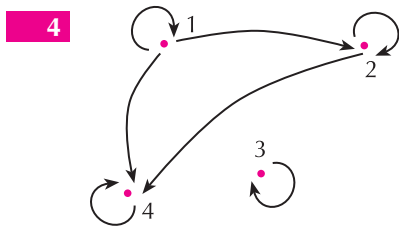
- 7 Nell'insieme degli alunni della tua classe la relazione \mathcal{R}_1 espressa dalla frase: «... abita nella stessa via di ...».
 8 In un insieme di persone la relazione \mathcal{R}_2 espressa dalla frase: «... ha la stessa taglia di ...».
 9 Nell'insieme N dei numeri naturali la relazione \mathcal{R}_3 espressa dalla frase: «... è multiplo di ...».
 10 Nell'insieme N dei numeri naturali la relazione \mathcal{R}_4 espressa dalla frase: «... è divisore di ...».
 11 Nell'insieme dei punti di una retta orientata la relazione \mathcal{R}_5 espressa dalla frase: «... segue ...».

ESERCIZI DI ABILITÀ \Rightarrow LIVELLO AVANZATO ***

- 1 Dati gli insiemi $A = \{\text{miele; frutto; uovo}\}$ e $B = \{\text{gallina; api; albero; balena}\}$ e la relazione \mathcal{R} definita dalla frase: «... è prodotto da ...», rappresenta il grafico della relazione e individua il dominio e il codominio della relazione stessa.

Osserva il grafo delle seguenti relazioni e individua le proprietà.





Deduci le proprietà delle relazioni \mathcal{R} rappresentate dalle seguenti tabelle.

6

	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2	X	X	X	
3	X	X	X	X
4	X		X	X

7

	1	2	3	4
1		X	X	X
2		X		X
3			X	
4			X	

8

	1	2	3	4	5
1		X	X	X	X
2	X		X	X	X
3		X			
4			X		
5	X		X	X	

9

	1	2	3	4	5
1	X	X		X	
2	X			X	
3			X		X
4	X	X		X	
5			X		

Stabilisci quali fra le seguenti relazioni sono di equivalenza e quali di ordine largo o stretto e, fra queste individua quelle che inducono un ordinamento totale o parziale.

- 10** Nell'insieme degli alunni della tua classe la relazione \mathcal{R}_1 definita dalla frase: «... ha lo stesso numero di scarpe di ...».
- 11** Nell'insieme degli operai di una fabbrica la relazione \mathcal{R}_2 definita dalla frase: «... abita più distante dalla fabbrica di ...».
- 12** In un insieme di persone la relazione \mathcal{R}_3 definita dalla frase: «... ha un'età superiore o uguale a ...».
- 13** Osserva le tabelle delle figure degli esercizi che seguono. Determina quali fra di esse sono relazioni d'ordine, specificandone il tipo.

a.

	1	2	3	4	5
1	X	X		X	X
2		X			X
3	X	X	X		X
4			X	X	
5				X	X

b.

	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2		X	X	X
3			X	X
4				X

c.

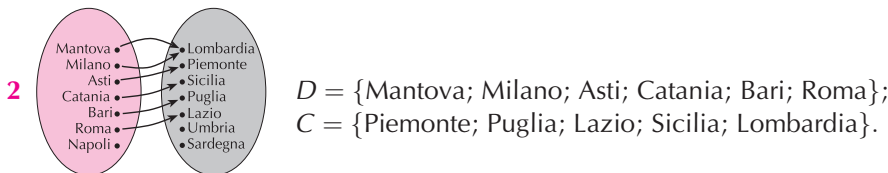
	1	2	3	4	5
1				X	
2	X			X	X
3					
4					
5				X	

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1 proprietà, corrispondenza. **2 b.**
 3 sagittale, tabella a doppia entrata. **4** dominio = {vino; pane}; codominio = {uva; farina; sale}.
 5 a. **6** proprietà; elementi di A stesso. **7 b.**
 8 a. antiriflessiva; **b.** in relazione con y; in relazione con x;
 c. $\forall x, y, z \in A$ se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$.
 9 antisimmetrica. **10 c.**
 11 equivalenza; a. V; b. V; c. V; d. F.
 12 a. transitiva e antisimmetrica; b. proprietà riflessiva; proprietà antiriflessiva.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO BASE

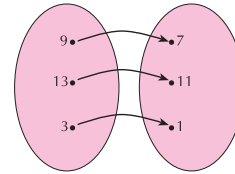


- 4** riflessiva, simmetrica, transitiva. **6** relazione d'ordine stretto.
7 equivalenza. **8** no, perché non sempre vale la proprietà transitiva.
9 equivalenza. **10** transitiva, antisimmetrica, antiriflessiva; ordine stretto.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO MEDIO

1 $B = \{6; 12; 18\}; D = \{2; 4; 6\}$

2 $B = \{7; 11; 1\};$



- 3 a.** nessun alunno può avere la media dei voti maggiore della stessa media; media (a) > media (b) e media (b) > media (c); media (a) > media (c); antisimmetrica, media (b) > media (a);
b. alunno ha la stessa altezza di se stesso; $h(a) = h(b)$, $h(b) = h(a)$; transitiva, se $h(a) = h(b)$, $h(b) = h(c)$, $h(a) = h(c)$.
4 antiriflessiva; antisimmetrica. **5** riflessiva, simmetrica, transitiva.
6 ordine; a. V; b. F; c. F; d. V. **7** equivalenza.
8 equivalenza. **9** ordine largo.
10 ordine stretto. **11** ordine stretto.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO AVANZATO



- 2** AS. **3** AR, AS, T. **4** R, AS, T. **5** AR, S. **6** R, S. **7** AS, T. **8** AR.
9 nessuna proprietà. **10** riflessiva; simmetrica; transitiva; $\mathcal{R}_1 \Rightarrow$ Relazione di equivalenza.
11 antisimmetrica; antiriflessiva; transitiva; $\mathcal{R}_2 \Rightarrow$ Relazione d'ordine stretto.
12 antisimmetrica; riflessiva; transitiva; $\mathcal{R}_3 \Rightarrow$ Relazione d'ordine largo.
13 a. no; **b.** ordine totale; **c.** ordine parziale.