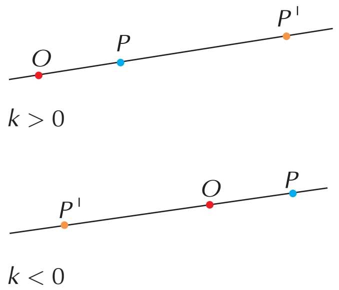
Concetti chiave e regole

L'omotetia

Fissati in un piano un punto O e un numero reale k non nullo, si dice **omotetia di centro O e rapporto k** la trasformazione del piano in sè che ad ogni punto P associa il punto P' così costruito: si traccia la retta OP e si prende su di essa il punto P' tale che sia $OP' \cong |k|OP$ con la convenzione che se $k > 0$ allora P' si trova dalla stessa parte di P rispetto ad O, se $k < 0$ allora P' si trova da parte opposta di P rispetto ad O.
In particolare, se $k = 1$ l'omotetia coincide con la trasformazione identica, se $k = -1$ coincide con la simmetria di centro O.



Le proprietà dell'omotetia

L'omotetia gode delle seguenti proprietà:

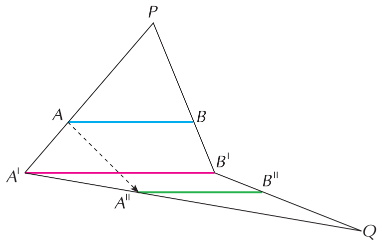
- trasforma una retta r in una retta r' ad essa parallela
- trasforma un segmento AB in un segmento $A'B'$ ad esso parallelo e tale che sia $A'B' \cong |k|AB$
- trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente
- il rapporto fra i perimetri di due poligoni omotetici è $|k|$
- il rapporto fra le aree di due poligoni omotetici è k^2

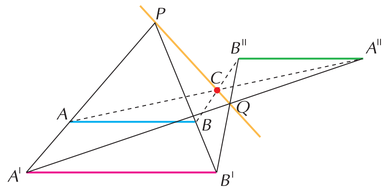
Inoltre si verifica che due triangoli che hanno i lati a due a due paralleli si corrispondono sempre in una omotetia.

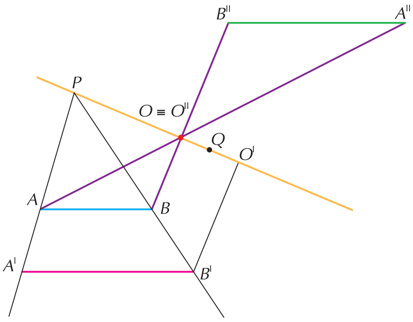
Il prodotto di omotetie

Componendo due omotetie entrambe di centro O e rapporti rispettivamente h e k si ottiene ancora una omotetia di centro O e rapporto hk.
Se le due omotetie hanno centri diversi P e Q, allora:

- se $hk = 1$ si ottiene una traslazione
- se $hk = -1$ si ottiene una simmetria centrale il cui centro è allineato con P e Q
- se $|hk| \neq 1$ si ottiene una omotetia di rapporto hk il cui centro è allineato con P e Q.







La similitudine

Una **similitudine** di rapporto $k > 0$ è la trasformazione che si ottiene applicando, in un ordine qualsiasi, una omotetia di rapporto k o $-k$ e una isometria. In una similitudine:

- il rapporto fra segmenti corrispondenti è uguale k
- angoli che si corrispondono sono congruenti.

Inoltre, due poligoni sono simili se e solo se hanno tutti i lati proporzionali e tutti gli angoli ordinatamente congruenti.

I criteri di similitudine dei triangoli

La similitudine fra triangoli può essere riconosciuta in base a tre **criteri di similitudine** i quali affermano che due triangoli sono simili se hanno:

- due angoli ordinatamente congruenti (**primo criterio**)
- due lati proporzionali e l'angolo fra essi compreso congruente (**secondo criterio**)
- tre lati proporzionali (**terzo criterio**).

Se due triangoli sono simili, allora:

- il rapporto fra altezze, mediane, bisettrici omologhe è uguale al rapporto di similitudine
- il rapporto fra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine
- il rapporto fra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Inoltre, in ogni triangolo rettangolo:

- ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
- l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

I criteri di similitudine dei poligoni

Anche per riconoscere la similitudine fra due poligoni si può ricorrere ad alcuni criteri.
Due poligoni sono simili se hanno tutti gli angoli ordinatamente congruenti e tutti i lati proporzionali ad eccezione dei seguenti elementi sui quali non è necessaria alcuna verifica:

- tre angoli consecutivi
- due angoli consecutivi ed il lato fra essi compreso
- due lati consecutivi e l'angolo fra essi compreso.

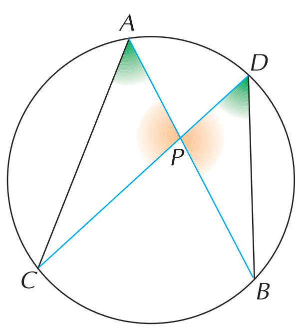
Le applicazioni

Relativamente ad una circonferenza e alle sue corde, secanti e tangenti, valgono le seguenti proprietà:

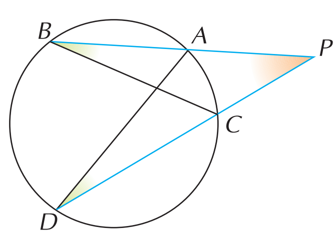
① se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti di una corda sono i medi, i segmenti dell'altra corda sono gli estremi di una proporzione

② se da un punto esterno si tracciano due secanti, una secante e la sua parte esterna sono i medi, l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione

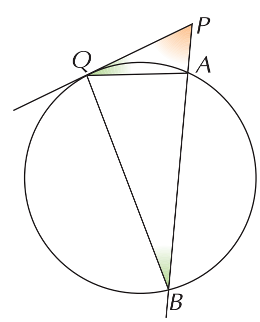
③ se da un punto esterno a una circonferenza si tracciano una secante e una tangente, il segmento di tangente è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.



① $CP : BP = AP : DP$



② $PD : PB = PA : PC$



③ $PB : PQ = PQ : PA$