Integrazione per parti

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue che abbiano derivata continua in un intervallo $[a, b]$, consideriamo la funzione $f(x) \cdot g(x)$. Sappiamo calcolare la derivata della funzione prodotto:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] - f(x) \cdot g'(x)$$

Se ora integriamo entrambi i membri di questa relazione otteniamo

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx}$$

La formula ottenuta ci permette di calcolare l'integrale del prodotto di due funzioni quando una di esse viene interpretata come derivata di una funzione nota; in essa:

- la funzione $g(x)$ prende il nome di **fattore finito**
- il termine $f'(x)dx$ prende il nome di **fattore differenziale**.

Nell'applicazione della formula occorre scegliere quale delle due funzioni deve essere interpretata come funzione derivata. A volte la scelta è obbligata in quanto di una sola delle due è nota la primitiva; altre volte la scelta può cadere indifferentemente su una o sull'altra funzione, ma deve poi essere possibile calcolare l'integrale al secondo membro della formula.

Vediamo alcuni esempi.

1. $\int x \ln x \, dx$

In questo caso la scelta del fattore differenziale è obbligata in quanto sappiamo calcolare la primitiva della funzione x, mentre non conosciamo quella della funzione $\ln x$. Applichiamo la formula:

$$\int \underset{\downarrow \atop f'}{x} \, \underset{\downarrow \atop g}{\ln x} \, dx = \underset{\downarrow \atop f}{\frac{1}{2}x^2} \, \underset{\downarrow \atop g}{\ln x} - \int \underset{\downarrow \atop f}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underset{\downarrow \atop g'}{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx$$

Calcolando il secondo integrale otteniamo: $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

2. $\int x \cdot \sin x \, dx$

Questa volta conosciamo sia la primitiva della funzione x che quella della funzione $\sin x$; è quindi possibile applicare la formula in due modi. Vediamo però che cosa otteniamo al secondo membro e se è possibile calcolare l'integrale a cui si perviene.

I modo: $$\int \underset{f'}{x} \cdot \underset{g}{\sin x}\, dx = \underset{f}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underset{g}{\sin x} - \int \underset{f}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underset{g'}{\cos x}\, dx$$

Ci accorgiamo che l'integrale al secondo membro non solo è più complesso di quello originale, ma non sappiamo nemmeno come calcolarlo; questa scelta non è quindi conveniente.

II modo: $$\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{\sin x}\, dx = \underset{f}{-\cos x} \cdot \underset{g}{x} - \int \underset{f}{-\cos x} \cdot \underset{g'}{1}\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Questa applicazione della formula ci ha permesso di risolvere il problema.

ESERCIZI

1 $\int x^2 \ln x\, dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\right]$

2 $\int xe^{2x+1}\, dx$ $\left[\frac{1}{4}e^{2x+1}(2x-1) + c\right]$

3 $\int x \ln 3x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 \ln 3x - \frac{1}{4}x^2 + c\right]$

4 $\int x^2 e^x\, dx$ $\left[e^x(x^2 - 2x + 2) + c\right]$

5 $\int 2x \ln (x+4)\, dx$ $\left[4x - \frac{1}{2}x^2 + (x^2 - 16)\ln(x+4) + c\right]$

6 $\int (2x+1)\ln x\, dx$ $\left[(x^2 + x)\ln x - \frac{x^2}{2} - x + c\right]$

7 $\int (x+1)e^{x+1}\, dx$ $\left[xe^{x+1} + c\right]$

8 $\int (3x+1)\sin x\, dx$ $\left[3\sin x - (3x+1)\cos x + c\right]$

9 $\int x^2\, e^{2x+1}\, dx$ $\left[\frac{e^{2x+1}}{4}(2x^2 - 2x + 1)\right]$

10 $\int x^3 e^{x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + c\right]$

11 $\int x^3 \sin x\, dx$ $\left[(3x^2 - 6)\sin x - x(x^2 - 6)\cos x + c\right]$

12 $\int \sqrt[3]{x} \ln x\, dx$ $\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(\ln x - \frac{3}{4}\right) + c\right]$