APPROFONDIMENTO

Problemi di massimo e minimo

In molti problemi viene richiesto di trovare i valori massimi e minimi (assoluti) di una certa situazione e spesso per dare una risposta a queste questioni si deve costruire una funzione che rappresenta il modello del problema. Alcuni esempi:

- qual è la produzione ottimale in una azienda per avere i costi minimi e i ricavi massimi?
- come si devono costruire le lattine dei cibi in scatola per usare meno lamiera possibile?
- come si deve progettare una casa in modo da avere la massima superficie possibile avendo a disposizione una certa cubatura?

L'esempio che presentiamo di seguito è molto semplice ed è solo indicativo di come sia possibile affrontare questo tipo di problemi.
Problemi di maggiore complessità verranno affrontati il prossimo anno scolastico.

Esempio

La somma di due numeri è uguale a 10. Quanto valgono i due numeri in modo che sia massimo il loro prodotto?

Indichiamo con x uno dei due numeri, con $0 \leq x \leq 10$.

L'altro numero è $\quad 10 - x$.

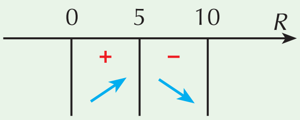
Il loro prodotto è $\quad x(10 - x)$.

Dobbiamo quindi trovare il massimo assoluto della funzione $f(x) = 10x - x^2$ nell'intervallo $[0, 10]$.

Si tratta di una parabola con la concavità verso il basso che ha il suo massimo nel vertice. In alternativa possiamo ricorrere ai metodi dell'analisi.

Calcoliamo la derivata: $\quad f'(x) = 10 - 2x$

La derivata si annulla in $x = 5$ ed il suo segno è nella tabella:



In $x = 5$ la funzione presenta un massimo relativo che è anche il massimo assoluto della funzione.
Il prodotto dei due numeri è massimo quando i due numeri sono uguali; il valore massimo è $f(5) = 25$.

ESERCIZI

1 La somma di due numeri è 30; quali sono i due numeri se deve essere minima la somma dei loro quadrati? [15, 15]

2 La somma di due numeri è 60; quali sono i due numeri se la somma dei loro inversi è minima? [30, 30]

3 La somma di due numeri è 90; trovali in modo che la somma del triplo del quadrato del primo con sei volte il secondo sia minima. [1, 89]

4 La somma di due numeri è 60; trova i due numeri in modo che la somma del doppio del quadrato del primo con il quadruplo del quadrato del secondo sia minima. [40, 20]

5 Determina la misura dei cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa uguale a 5 in modo che la sua area sia massima.

$\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}\text{; il triangolo è isoscele}\right]$

6 Il perimetro di un rettangolo è 40cm; quanto devono misurare i suoi lati affinché l'area sia massima?

[10cm; è un quadrato]

7 Fra tutti i triangoli isosceli di area 120cm^2, qual è quello per cui è minima la somma fra il quadruplo della base e l'altezza ad essa relativa.

$[\text{base} = 2\sqrt{15}\text{; altezza} = 8\sqrt{15}]$

8 Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in un cerchio di raggio $r = 34$, qual è quello in cui la somma del doppio della base con l'altezza ad essa relativa è massima?

$[\text{base} = 16\sqrt{17}\text{; altezza} = 2\sqrt{17} + 34]$

9 Tra tutti i punti che appartengono alla retta di equazione $2x - y + 3 = 0$ qual è quello per il quale è minima la distanza dall'origine O degli assi coordinati?

$\left[\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)\right]$

10 Determina le coordinate del punto P che appartiene alla retta di equazione $y = 3x + 2$ che ha la minima distanza dal punto $Q(1, 2)$.

$\left[P\left(\frac{1}{10}, \frac{23}{10}\right)\right]$

11 La parabola di equazione $y = x^2 - 3x$ interseca gli assi cartesiani nell'origine e nel punto A. Trova le coordinate del punto P appartenente all'arco OA in modo che abbia la massima distanza dall'origine.

$[P(3, 0)]$

12 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x$ e la retta $x - 2y - 6 = 0$, qual è il punto della parabola che ha la minima distanza dalla retta?

$\left[P\left(-\frac{3}{4}, -\frac{15}{16}\right)\right]$