

Le equazioni e le disequazioni esponenziali con i moduli

Per risolvere equazioni e disequazioni che contengono dei moduli si applicano gli stessi criteri che abbiamo imparato ad usare per le equazioni e le disequazioni algebriche; risolvi gli esercizi che ti proponiamo di seguito dopo aver osservato con attenzione gli esempi svolti.

Le equazioni

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$|2^{x+1} - 1| = 3$$

L'equazione è equivalente a: $2^{x+1} - 1 = 3 \quad \vee \quad 2^{x+1} - 1 = -3$

Risolvi la prima: $2^{x+1} = 4 \qquad 2^{x+1} = 2^2 \qquad x + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Risolvi la seconda: $2^{x+1} = -2 \qquad$ l'equazione è impossibile

In definitiva $S = \{1\}$.

2

$$|7^{2x} - 8 \cdot 7^x - 1| = 8$$

$$|2^x - 1| = 3$$

$$\left[S_1 = \left\{ 0, 1, \frac{2 \log 3}{\log 7} \right\}; S_2 = \{2\} \right]$$

3

$$|3^{x+1} - 9| = 10$$

$$|3 \cdot 2^{2x} - 2| = 1$$

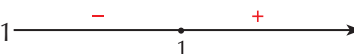
$$\left[S_1 = \left\{ \frac{\log 19}{\log 3} - 1 \right\}; S_2 = \left\{ 0, -\frac{\log 3}{2 \log 2} \right\} \right]$$

4 ESERCIZIO GUIDATO

$$3^x + 2 \cdot 3^{|x-1|} = 5$$

In questa equazione la variabile compare nell'argomento di un valore assoluto; per poterla risolvere dobbiamo studiare il segno di $x - 1$:

$x - 1$ è positivo se $x > 1$, è negativo se $x < 1$, è nullo se $x = 1$



L'equazione è quindi equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 5 \end{cases} \quad (\text{A}) \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < 1 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5 \end{cases} \quad (\text{B})$$

- Risolviamo l'equazione (A):

$$3^x + \frac{2 \cdot 3^x}{3} = 5 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x = 15 \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 3^x = 15 \quad \rightarrow \quad 3^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

La soluzione è accettabile.

- Risolviamo l'equazione (B):

$$3^x + \frac{6}{3^x} - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$$

Posto $3^x = t$, l'equazione diventa: $t^2 - 5t + 6 = 0$

ed ha soluzioni: $t = 3 \quad \vee \quad t = 2$

Operando la sostituzione inversa abbiamo infine:

$$\bullet 3^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

$$\bullet 3^x = 2 \quad \rightarrow \quad x \log 3 = \log 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,6$$

Dovendo essere $x < 1$, nessuna delle soluzioni trovate è accettabile.

In definitiva, la sola soluzione è $x = 1$ ottenuta dall'equazione (A): $S = \{1\}$.

$$5 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x^2-x|} = 2 \qquad 25 \cdot 5^{|x-2|} = 1 \qquad [S_1 = \{-1, 2\}; S_2 = \emptyset]$$

$$6 \quad 3^{|2x-1|} = \frac{1}{9} \qquad 2^{1+|x|} - 4 = 0 \qquad [S_1 = \emptyset; S_2 = \{-1, 1\}]$$

$$7 \quad 3^{|x+2|} + 36 = 3^{|x+2|+1} \qquad 3^{2+|x|} - 9 = 0 \qquad [S_1 = \left\{\frac{\log 2}{\log 3}, -\frac{\log 162}{\log 3}\right\}; S_2 = \{0\}]$$

$$8 \quad 2 \cdot 3^{|x|} = 3 \cdot 2^{2x} \qquad [S = \left\{\frac{\log 2 - \log 3}{\log 12}\right\}]$$

$$9 \quad 2^{|x|} + 2^{-x} = \frac{17}{4} \qquad [S = \left\{2, \frac{3\log 2 - \log 17}{\log 2}\right\}]$$

$$10 \quad 3 \cdot 2^{|2x|} = 4^{2x} + 2 \qquad [S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}]$$

Le disequazioni

11 ESERCIZIO GUIDATO

$$|2^x - 5| > 1$$

La disequazione è equivalente alle seguenti:

$$(A) \quad 2^x - 5 < -1$$

$$(B) \quad 2^x - 5 > 1$$

Risolviamole:

$$(A) \quad 2^x < 4 \qquad 2^x < 2^2 \quad \rightarrow \quad x < 2$$

$$(B) \quad 2^x > 6 \qquad x \log 2 > \log 6 \quad \rightarrow \quad x > \frac{\log 6}{\log 2}$$

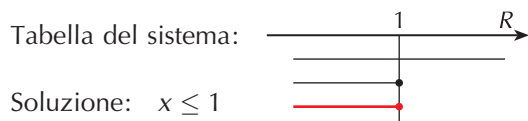
$$\text{La disequazione è verificata se: } x < 2 \quad \vee \quad x > \frac{\log 6}{\log 2}$$

12 ESERCIZIO GUIDATO

$$|3^x - 1| \leq 2$$

$$\text{La disequazione è equivalente al sistema: } \begin{cases} 3^x - 1 \geq -2 & (A) \\ 3^x - 1 \leq 2 & (B) \end{cases}$$

Risolviamo le due disequazioni: (A) $3^x \geq -1 \rightarrow \forall x \in R$
 (B) $3^x \leq 3 \rightarrow x \leq 1$



13 $|3^{2x} - 4| > 1$

$$\left[x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{\ln 5}{2 \ln 3} \right]$$

14 $1 - \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 3 \right| > -\frac{3}{2}$

$$\left[\frac{\ln 2 - \ln 11}{\ln 2} < x < 1 \right]$$

15 $\left| \frac{3^{x+1}}{9} - 2 \right| - 7 < 0$

$$[x < 3]$$

16 $5 \geq |2^{x-1} - 3|$

$$[x \leq 4]$$

17 $\frac{1}{2} < 2 + |3^x - 1|$

$$[R]$$

18 $\frac{8}{3} \geq 4 - \left| \left(\frac{2}{3} \right)^{x-1} - 2 \right|$

$$\left[x \leq \frac{\ln 20 - \ln 9}{\ln 2 - \ln 3} \vee x \geq 2 \right]$$