Concetti chiave e regole

Le trasformazioni geometriche

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano. Essa viene quindi determinata assegnando una legge (una funzione) che indica il modo in cui i punti si corrispondono.
In una trasformazione:

- i punti che hanno per trasformati se stessi si chiamano **punti uniti**; in particolare, se tutti i punti sono uniti, la trasformazione prende il nome di **identità**
- si dicono **invarianti** le caratteristiche delle figure che non cambiano dopo l'applicazione della trasformazione.

Le isometrie

Le trasformazioni geometriche si classificano in base agli invarianti; quelle che lasciano immutate le lunghezze dei segmenti si chiamano **isometrie**. Un'isometria:

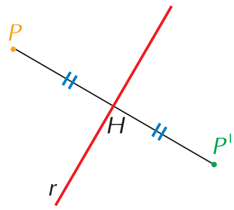
- conserva l'allineamento dei punti
- conserva il parallelismo
- conserva l'ampiezza degli angoli

  Di conseguenza, due figure che si corrispondono in un'isometria sono congruenti.

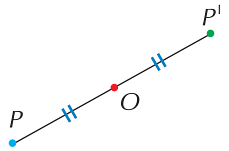
Le isometrie fondamentali

Esistono solo quattro tipi fondamentali di isometrie:

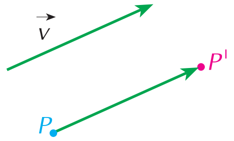
- la **simmetria assiale**, definita rispetto ad una retta r (l'asse di simmetria), che ad ogni punto P di un piano associa il punto P' che si costruisce in questo modo:
  - si traccia da P la perpendicolare a r che la incontra in H
  - si prende su di essa il punto P' nel semipiano opposto rispetto a P tale cha sia $P'H \cong PH$



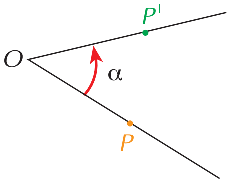
- la **simmetria centrale**, definita rispetto ad un punto O (il centro di simmetria), che ad ogni punto P di un piano associa il punto P' che si costruisce in questo modo:
  - si traccia la retta OP
  - si prende il punto P' sulla semiretta di origine O opposta rispetto a P tale che sia $P'O \cong PO$



- la **traslazione**, definita da un vettore $\vec{v}$, che ad ogni punto P di un piano associa il punto P' che è il secondo estremo del vettore $\vec{v}$ quando il primo estremo coincide con P



- la **rotazione**, definita assegnando un punto O (il centro di rotazione) ed un angolo orientato α, che ad ogni punto P associa il punto P' tale che $OP \cong OP'$ e $\widehat{POP'}$ abbia lo stesso orientamento e la stessa ampiezza di α.



Le proprietà delle isometrie

Oltre alle caratteristiche comuni a tutte le isometrie, ogni isometria particolare ne ha di proprie:

- la **simmetria assiale** ha come punti uniti i punti dell'asse e come rette unite le rette perpendicolari all'asse; inoltre non conserva l'ordinamento dei punti
- la **simmetria centrale** ha un solo punto unito (il centro O di simmetria) e le rette unite sono tutte quelle del fascio di centro O; segmenti o rette che si corrispondono sono paralleli; inoltre conserva l'ordinamento dei punti
- la **traslazione** non ha punti uniti e le rette unite sono quelle parallele al vettore di traslazione; segmenti o rette che si corrispondono sono paralleli; conserva l'ordinamento dei punti
- la **rotazione** ha come unico punto unito il centro di rotazione e non ha rette unite a meno che la rotazione sia di un angolo piatto o di un suo multiplo; conserva l'ordinamento dei punti.

Il prodotto di trasformazioni

Applicando in successione due isometrie si ottiene ancora un'isometria; in particolare:

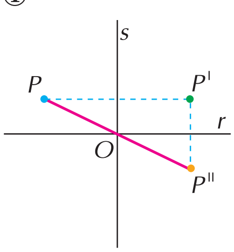
① il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari è una simmetria centrale avente centro nel punto di intersezione degli assi

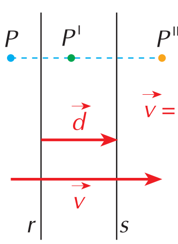
② il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli è una traslazione di vettore doppio della distanza fra i due assi e direzione e verso dal primo al secondo asse

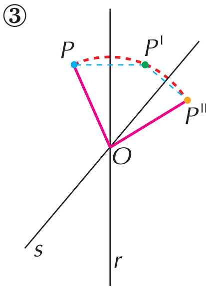
③ il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti è una rotazione di ampiezza uguale al doppio dell'angolo formato dai due assi, centro nel punto di intersezione degli assi e verso dal primo al secondo asse

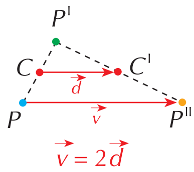
④ il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione di vettore doppio della distanza fra i centri e direzione e verso dal primo al secondo centro

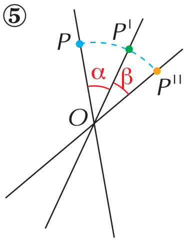
⑤ il prodotto di due rotazioni di ampiezza α e β e aventi lo stesso centro è una rotazione dello stesso centro e di ampiezza $\alpha + \beta$.

①


②


③


④


⑤


Una trasformazione si dice **involutoria** se, applicata due volte, coincide con la trasformazione identica. Delle isometrie studiate sono involutorie la simmetria assiale e quella centrale.