# Approfondimento

## Grafici di particolari funzioni lineari

Vogliamo tracciare il grafico della funzione $y = |x|$.

Sappiamo che $|x|$ significa: $\begin{cases} x & \text{quando } x \geq 0 \\ -x & \text{quando } x < 0 \end{cases}$

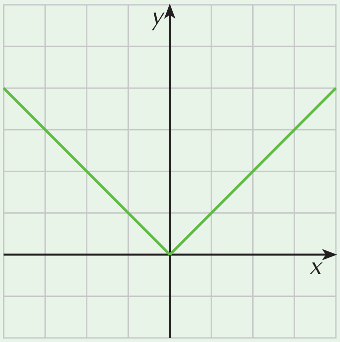
Possiamo allora riscrivere l'equazione di questa funzione in questo modo:

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e disegnare (***figura 1***):

- la retta di equazione $y = x$ nel semipiano delle ascisse positive o nulle
- la retta $y = -x$ nel semipiano delle ascisse negative.

***Figura 1***

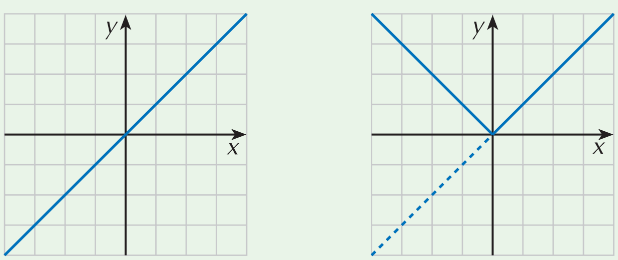



Osserviamo che il grafico trovato si può ottenere anche con questa procedura (***figura 2***):

- si disegna la retta $y = x$ per intero
- si esegue una simmetria rispetto all'asse $x$ della sola parte negativa del grafico (in pratica si esegue un ribaltamento della parte del grafico che si trova sotto l'asse $x$).

Infatti considerare il modulo di una qualsiasi espressione significa in pratica far diventare positivo ciò che è negativo.

***Figura 2***



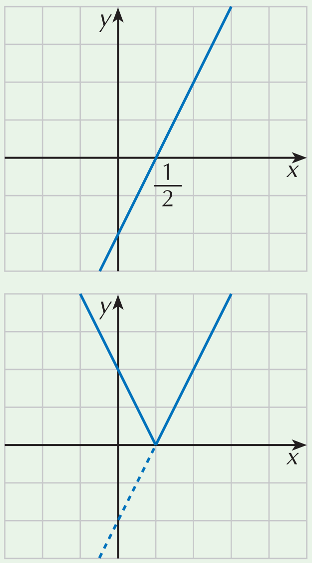

Questa procedura può essere generalizzata a una qualunque funzione di equazione $y = |f(x)|$ :

- si disegna il grafico di $f(x)$
- si ribaltano le parti di grafico che si trovano nel semipiano delle ordinate negative.

Costruiamo seguendo questa procedura il grafico di $y = |2x - 1|$ (***figura 3***):

- disegniamo la retta $y = 2x - 1$
- disegniamo la simmetrica rispetto all'asse $x$ della sola parte negativa.

***Figura 3***



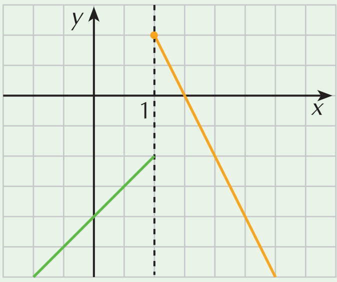

Alcune funzioni lineari possono essere definite da espressioni diverse in intervalli diversi: si parla di **funzioni lineari a tratti**. Consideriamo per esempio la funzione

$$y = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 1 \\ 3 - 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Essa ha come dominio l'insieme $R$, ma ha due espressioni distinte a seconda che $x$ sia maggiore o minore di 1. Il suo grafico è quindi formato da (***figura 4***):

- quello della retta $y = x - 2$ disegnata solo per valori di $x$ più piccoli di 1 (in pratica consideriamo solo la semiretta a sinistra del punto di ascissa di 1)
- quello della retta $y = 3 - 2x$ disegnata solo per valori di $x$ maggiori o uguali a 1 (in pratica consideriamo solo la semiretta a destra del punto di ascissa di 1).

***Figura 4***




Funzioni di questo tipo sono il modello di molti problemi reali; per esempio i costi delle telefonate, dove si paga in funzione dei minuti di conversazione ed il costo al minuto è diverso a seconda della lunghezza della telefonata. Una possibile funzione dei costi in funzione del tempo $t$ potrebbe essere la seguente:

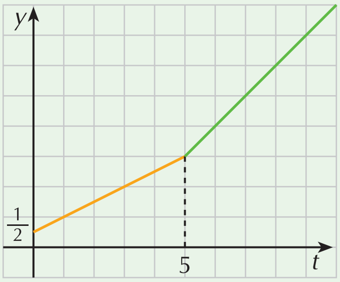
$$y = \begin{cases} 0{,}5 + \dfrac{1}{2}t & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 3 + (t - 5) & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

che ha questo significato:

- si paga un costo fisso di $0,5$ euro più mezzo euro al minuto per telefonate di al massimo 5 minuti
- si paga un costo fisso di 3 euro (corrispondente al costo di una telefonata di 5 minuti) più 1 euro al minuto per telefonate più lunghe di 5 minuti.

Il grafico di questa funzione è in ***figura 5*** dove sull'asse delle ascisse è rappresentato il tempo $t$ (in minuti).

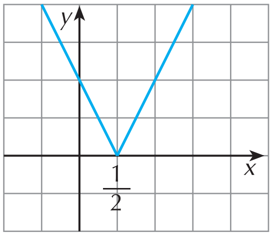
***Figura 5***



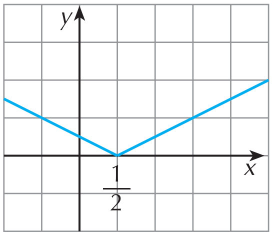

# ESERCIZI

## *Comprensione*

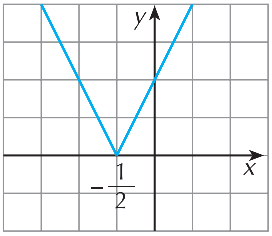
**1** Indica quale tra i seguenti è il grafico della funzione $y = |1 - 2x|$ :



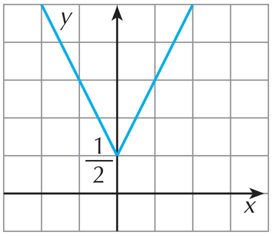

**a.**




**b.**

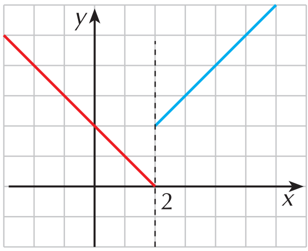



**c.**




**d.**

**2** La funzione il cui grafico è in figura ha equazione:




**a.** $y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

**b.** $y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

**c.** $y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

**d.** $y = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

## *Applicazione*

*Traccia il grafico delle seguenti funzioni.*

**3** **a.** $y = |4x|$ **b.** $y = |-2x|$ **c.** $y = |3x|$

**4** **a.** $y = |-6x|$ **b.** $y = -3|x|$ **c.** $y = \frac{1}{3}|x|$

*Disegna i grafici delle seguenti funzioni con i moduli.*

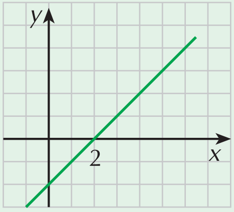
**5** **ESERCIZIO GUIDATO**

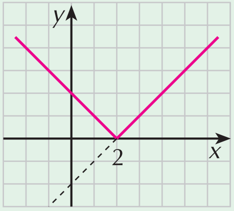
Vogliamo disegnare la curva di equazione $y = |x - 2|$.

Disegniamo dapprima la retta come se non ci fosse il modulo: $y = x - 2$ (prima figura).

Eseguiamo una simmetria rispetto all'asse $x$ della semiretta negativa (seconda figura).

Il grafico di $y = |x - 2|$ è evidenziato in colore rosso.




**6** $y = |2x + 3|$ **7** $y = |1 - x|$ **8** $y = |1 - 3x|$

**9** $y = |2x - 5|$ **10** $y = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$ **11** $y = \left|-\frac{3}{2}x + 1\right|$

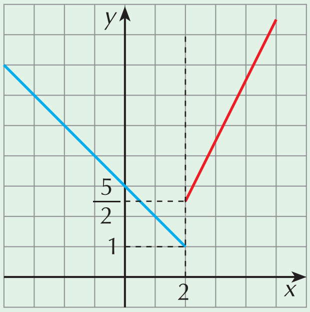
**12** $y = \left|\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right|$ **13** $y = \left|6x + \frac{1}{2}\right|$ **14** $y = \left|2 - \frac{3}{5}x\right|$

*Disegna i grafici delle seguenti funzioni lineari a tratti.*

**15** **ESERCIZIO GUIDATO**

$$y = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2 \\ 2x - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Dobbiamo disegnare la retta di equazione $y = 3 - x$ solo nel semipiano a sinistra della retta $x = 2$ e la retta di equazione $y = 2x - \frac{3}{2}$ nel semipiano a destra.




**16** $y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ **17** $y = \begin{cases} 3 + x & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$

**18** $y = \begin{cases} 5 & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ **19** $y = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x \leq 4 \\ x - 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

**20** $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{3}x + 2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ **21** $y = \begin{cases} \frac{2}{3}x - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

**22** $y = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x - 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

**23** $y = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -x + 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

**24** $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x & \text{se } x < -2 \\ 2x & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ \dfrac{3}{4}x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

**25** $y = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x - 1 & \text{se } x < -3 \\ -\dfrac{2}{3}x & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 6x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

*Disegna i grafici delle seguenti funzioni con i moduli trasformandole in funzioni lineari a tratti.*

**26** **ESERCIZIO GUIDATO**

Disegnamo ora il grafico della curva di equazione $y = \left|\dfrac{1}{2}x\right| - 3$.

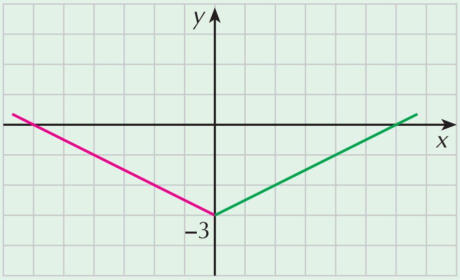
Per la presenza di un termine esterno al modulo, dobbiamo considerare i seguenti casi:

**a.** se $\dfrac{1}{2}x \geq 0$, cioè se $x \geq 0$, la curva ha equazione $y = \dfrac{1}{2}x - 3$

**b.** se $\dfrac{1}{2}x < 0$, cioè se $x < 0$, la curva ha equazione $y = -\dfrac{1}{2}x - 3$

L'espressione analitica dettagliata è allora

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$




Il suo grafico è quello della figura a fianco, in cui il ramo di colore verde è quello della retta $y = \dfrac{1}{2}x - 3$ valutato solo per $x \geq 0$, mentre il ramo di color rosso è quello della retta $y = -\dfrac{1}{2}x - 3$ valutato solo per $x < 0$.

**27** **ESERCIZIO GUIDATO**

Disegna la curva di equazione $y = |x - 1| + 2$

Distingui i due casi:

**a.** se $x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq 1$ la curva ha equazione .........

**b.** se $x - 1 < 0$, cioè $x < 1$ la curva ha equazione .........

La sua espressione analitica dettagliata è dunque $y = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \forall x \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \forall x < 1 \end{cases}$

**28** $y = |3 - 2x| + 3$

**29** $y = \left|\dfrac{3}{2}x\right| + 1$

**30** $y = \left|\frac{1}{2}x - 2\right| + \frac{3}{2}$

**31** $y = \left|x - \frac{1}{2}\right| + 3x - 1$

**32** $y = |x - 2| + x$

**33** $y = |x| + |x - 1|$

**34** $y = |5 - x| + 4$

**35** $y = |x - 3| + 2x$