Concetti chiave e regole

Intervalli, intorni e punti di accumulazione

Si chiama **intervallo** un qualunque insieme di numeri reali compresi fra altri due a e b, dove a o b possono essere finiti o infiniti. In particolare:

- (a, b) è un intervallo aperto che corrisponde all'insieme degli x tali che $a < x < b$
- $[a, b]$ è un intervallo chiuso che corrisponde all'insieme degli x tali che $a \leq x \leq b$

In pratica, la parentesi tonda indica che l'estremo dell'intervallo non appartiene all'insieme, la parentesi quadra indica che gli appartiene; sui simboli di ∞ si usa solo la parentesi tonda.

Intorno di un punto x_0 è ogni intervallo aperto che contiene x_0 al suo interno; intorno di $+\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(a, +\infty)$, intorno di $-\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(-\infty, b)$, intorno di infinito è l'unione di un intorno di $-\infty$ con un intorno di $+\infty$.

Un punto x_0 si dice di **accumulazione** per un insieme E se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E.

Le definizioni di limite

Una funzione ha per limite un numero ℓ finito per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ha fra le sue soluzioni un intorno di c.
Una funzione ha per limite ∞ per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x)| > M$ è verificata in un intorno di c.

Teoremi sui limiti

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell'$ e ℓ e ℓ' sono due valori finiti, allora:

- $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm \ell'$
- $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot \ell'$
- $\lim\limits_{x \to c} [k \cdot f(x)] = k\ell$ con $k \in R$
- $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \ell^n$
- $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\ell}{\ell'}$ se $\ell' \neq 0$

Le forme di indeterminazione

Nel calcolo di un limite, generalmente quando c è infinito oppure i limiti ℓ e ℓ' sono nulli, si può giungere a quelle che si chiamano **forme di indeterminazione** che sono:

$(+\infty) - (+\infty)$ $\quad (+\infty) + (-\infty)$ $\quad 0 \cdot (\pm\infty)$ $\quad \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\dfrac{0}{0}$ $\quad 1^{\pm\infty}$ $\quad 0^0$ $\quad (\pm\infty)^0$

Per risolvere alcune di queste forme occorre tenere presenti queste regole:

- il limite per $x \to \infty$ di un polinomio è uguale al limite del termine di grado massimo:

$$\lim_{x \to \infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n) = \lim_{x \to \infty} a_0 x^n$$

- il limite per $x \to \infty$ del rapporto fra due polinomi è uguale al limite del rapporto fra i termini di grado massimo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^k + \dots . a_k}{b_0 x^h + \dots . b_h} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^k}{b_0 x^h}$$

e si ha che: - se $k > h$ il limite vale ∞; - se $k = h$ il limite vale $\dfrac{a_0}{b_0}$; - se $k < h$ il limite vale 0

- se $\lim_{x\to c} \frac{A(x)}{B(x)}$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si semplifica la frazione scomponendo i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene
- se $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}\right)$ si presenta nella forma $\infty - \infty$, si moltiplica e si divide per $\left(\sqrt{A(x)} \mp \sqrt{B(x)}\right)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene.

I limiti notevoli

Valgono i seguenti limiti notevoli:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to c} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ quando $f(x) \to 0$ per $x \to c$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e $\lim_{x\to c} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ quando $f(x) \to \infty$ per $x \to c$

Infiniti e infinitesimi

Si dice che:

- la funzione $y = f(x)$ è un **infinitesimo** per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$
- la funzione $y = f(x)$ è un **infinito** per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime per $x \to c$:	Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinite per $x \to c$:
• $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	• $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
• $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$	• $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$
• $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$	• $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Le successioni

Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme N dei numeri naturali.

Indicata con a_n l'espressione del suo termine generale, una successione può essere:

- **convergente** se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

  cioè se $\forall\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che $\forall n > \nu$ sia $|a_n - \ell| < \varepsilon$
- **divergente** se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

  cioè se, $\forall M > 0$, esiste un indice ν tale che $\forall n > \nu$ sia rispettivamente $a_n > M$ o $a_n < -M$.
- **irregolare** se né converge né diverge.

Per il calcolo del limite di una successione valgono teoremi analoghi a quelli studiati per i limiti delle funzioni di numeri reali.