APPROFONDIMENTO

Equazioni e disequazioni logaritmiche per via grafica

Le equazioni o disequazioni logaritmiche che coinvolgono altre espressioni della variabile, per esempio espressioni polinomiali, non possono essere risolte per via algebrica ed è necessario ricorrere a metodi grafici; vediamo alcuni esempi.

I esempio

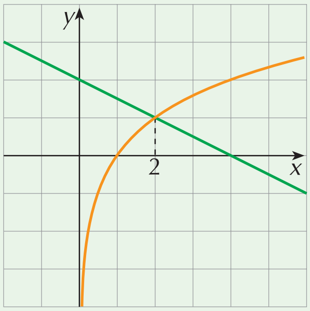
$\log_2 x = -\frac{1}{2}x + 2$

Disegniamo le funzioni: $y = \log_2 x$ e $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Dal grafico sembra che le due curve si intersechino in $x = 2$; procediamo alla verifica

$$\log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \qquad \rightarrow \qquad 1 = 1$$

La soluzione di questa equazione è $x = 2$.

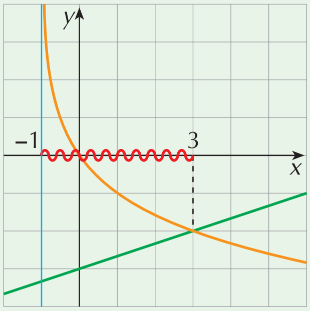


II esempio

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \frac{1}{3}x - 3$

Costruiamo i grafici delle funzioni: $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ e $y = \frac{1}{3}x - 3$.

Tali curve si intersecano nel punto $x = 3$ (verificalo).
Dovendo essere la funzione logaritmica "maggiore" della retta, la soluzione della disequazione è rappresentata dai valori di x per i quali il grafico della curva logaritmica si trova "al di sopra" del grafico della retta, cioè per $-1 < x < 3$.



III esempio

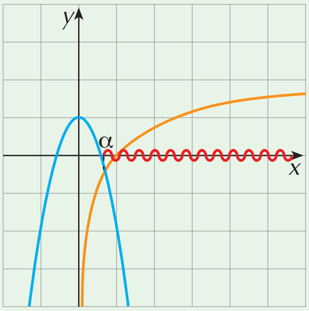
$1 - 3x^2 \leq \ln x$

Confrontiamo i grafici delle funzioni: $y = 1 - 3x^2$ e $y = \ln x$.
La prima funzione è una parabola, la seconda è una curva logaritmica elementare; esse si intersecano nel punto di ascissa α dove

$$0 < \alpha < 1$$

Poiché vogliamo che la parabola sia "minore o uguale" della curva logaritmica, le soluzioni della disequazione sono i valori di x tali che

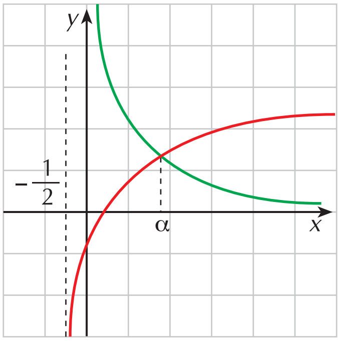
$$x \geq \alpha$$



1 In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(x)$ (in rosso) definita per $x > -\frac{1}{2}$ e $g(x)$ (in verde) definita per $x > 0$; si può dire che la disequazione $f(x) \leq g(x)$ è verificata per:

a. $0 < x \leq \alpha$ **b.** $x \leq \alpha$

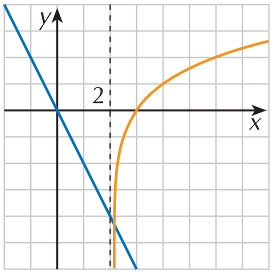
c. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \alpha$ **d.** $0 \leq x \leq \alpha$



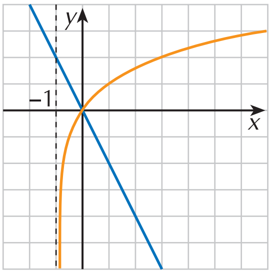
2 Per risolvere graficamente l'equazione $\ln(x+2) + x = 0$ occorre confrontare le due funzioni:

a. $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = -x$ **b.** $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = x$ **c.** nessuna delle precedenti

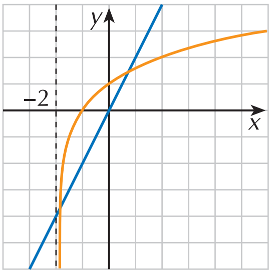
3 Quale fra i seguenti grafici permette di individuare le soluzioni della disequazione $\log_2(x+2) + 2x > 0$?



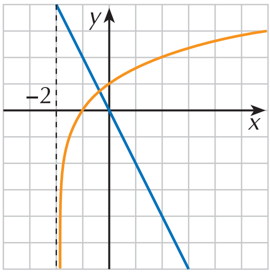
a.



b.



c.



d.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni logaritmiche (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\log x - 3x + 2 = 0$

Scriviamo l'equazione nella forma $\log x = 3x - 2$ e confrontiamo i grafici delle funzioni

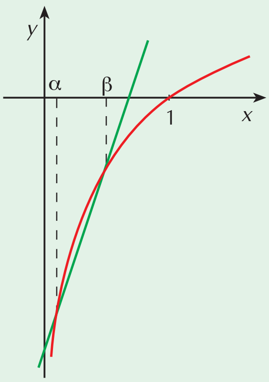
$y = \log x$ e $y = 3x - 2$

Essi si intersecano nei punti di ascissa α e β dove

$0 < \alpha < 0{,}1$ e $0{,}5 < \beta < 0{,}6$

L'equazione ammette dunque le due soluzioni

$x = \alpha \quad \vee \quad x = \beta$



5 $x = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad$ $\log_3 x = 1 - \ln x$ $\quad$ $[S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$; $S = \{\alpha\}$ con $1 < \alpha < e]$

6 $x + \ln x = 0$ $\quad$ $\log_2 x = \log_{\frac{4}{5}}(x+1) + 2$ $\quad$ $[S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$; $S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1]$

7 $\log_{\frac{1}{4}} x = 4 - x^2$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_3(x-1) - 1$ $\quad$ $[S = \{\alpha, \beta\}$ con $0 < \alpha < 1 \ \wedge\ 2 < \beta < 3$; $S = \{2\}]$

8 $\log_2 x + 1 = (x-1)^2$ $[S = \{\alpha, \beta\} \text{ con } 0 < \alpha < 1 \ \wedge \ 2 < \beta < 3]$

9 $\log_3 (x+4) = e^x$ $[S = \{\alpha, \beta\} \text{ con } -3 < \alpha < -2{,}5 \ \wedge \ 0 < \beta < 1]$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni logaritmiche (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

10 $2x + \log_5 x \geq 0$ $[x > \alpha;\ 0 < \alpha < 1]$

11 $2^x + \log x > 0$ $[x > \alpha;\ 0 < \alpha < 0{,}5]$

12 $\log_2 (x-3) < -x$ $[3 < x < \alpha;\ 3 < \alpha < 3{,}5]$

13 $\ln (x+1) \leq x^2$ $[-1 < x \leq 0 \ \vee \ x \geq \alpha;\ 0{,}5 < \alpha < 1]$

14 $\log_{\frac{1}{2}} x \geq x^2 - 3x + 1$ $[0 < x \leq 2]$

15 $3x - 1 \leq \log_2 x$ [mai verificata]

16 $\log_7 x - 3x < -2$ $[0 < x < \alpha \ \vee \ x > \beta;\ 0 < \alpha < 0{,}2 \text{ e } 0{,}5 < \beta < 1]$

Risultati di alcuni esercizi.

1 **a.** **2** **a.** **3** **d.**