Le equazioni di Bernoulli

Un'equazione si dice **di Bernoulli** se è del primo ordine ed assume la forma

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni continue in un intervallo I e possiamo supporre che n sia diverso da 0 e da 1 per non rientrare nel caso delle equazioni lineari.

Un'equazione di questo tipo ammette sempre fra le sue soluzioni la funzione $y = 0$ (basta sostituire per verificarlo) e, dividendo per il termine y^n (possiamo supporre che sia $y \neq 0$ visto che abbiamo già individuato la soluzione $y = 0$), la si può ricondurre ad un'equazione lineare. Con tale operazione otteniamo infatti

$$y' \cdot y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Se adesso operiamo un cambiamento di variabile ponendo $y^{1-n} = t$, si ha che

$$t' = (1-n)y^{-n}\ y' \qquad \text{cioè} \qquad y' = \frac{y^n}{1-n} \cdot t'$$

e quindi l'equazione diventa $\dfrac{1}{1-n} \cdot t' + p(x)t = q(x)$

che è un'equazione lineare non omogenea nell'incognita t.

Ad ogni integrale di questa equazione corrisponde allora un integrale di quella di Bernoulli che ha la forma

$$\boxed{y = [t(x,c)]^{\frac{1}{1-n}}}$$

Risolviamo, ad esempio, l'equazione di Bernoulli $y' - 2y = x\sqrt{y}$ in cui $n = \dfrac{1}{2}$.

Abbiamo detto che la funzione $y = 0$ è un integrale particolare; per trovare l'integrale generale dividiamo entrambi i membri dell'equazione per $\sqrt{y}$ ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y' - 2\sqrt{y} = x$$

Posto $t = \sqrt{y}$, si ha che $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'$, cioè $y' = 2t \cdot t'$. L'equazione assume quindi la forma

$$2t' - 2t = x \qquad \text{cioè} \qquad t' - t = \frac{x}{2}$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea nell'incognita t in cui $p(x) = -1$ e $q(x) = \dfrac{x}{2}$; il suo integrale generale si determina applicando la formula risolutiva di pagina 180 ed è

$$t = e^{-\int -dx}\left[\int \frac{x}{2} \cdot e^{\int -dx} dx + c\right] = e^x\left[\int \frac{x}{2} \cdot e^{-x} dx + c\right] = -\frac{x+1}{2} + c\ e^x$$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi $y = t^2$, cioè $y = \left[-\dfrac{x+1}{2} + ce^x\right]^2$

Dopo aver verificato che le seguenti equazioni sono di Bernoulli, determina il loro integrale generale.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$xy' - 2y - x^2y^2 = 0$

L'equazione può essere riscritta nella forma $y' - \dfrac{2}{x}y = xy^2$ ed è quindi di Bernoulli con $n = 2$.

L'equazione ammette fra le sue soluzioni la funzione $y = 0$.

Procediamo ora alla determinazione dell'integrale generale.

- Dividiamo entrambi i membri per y^2: $y' \cdot y^{-2} - \dfrac{2}{x}y^{-1} = x$
- Poniamo $y^{-1} = t$ da cui, derivando entrambi i membri, troviamo che $y' = -y^2t'$
- In questo modo l'equazione diventa $t' + \dfrac{2}{x}t = -x$ ed ha soluzione $t = \dfrac{c}{x^2} - \dfrac{x^2}{4}$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi: $y = t^{-1} = \dfrac{4x^2}{4c - x^4}$.

2 $y' - 5y = x^2\sqrt{y}$ $\left[y = \left(-\dfrac{25x^2 + 20x + 8}{125} + e^{\frac{5}{2}x}c\right)^2\right]$

3 $y' - y \sin x = y^2 \sin x$ $\left[y = \dfrac{1}{ce^{\cos x} - 1}\right]$

4 $2xy' - y^2 \ln x - 2y = 0$ $\left[y = \dfrac{2x}{x - x \ln x + c}\right]$

5 $xy' = y(1 - y^2)$ $\left[y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + c}}\right]$

6 $-3xy' + 6y = -3x^2y^3$ $\left[y = \pm\sqrt{\dfrac{3x^4}{3c - x^6}}\right]$

7 $y' - \dfrac{3}{x}y = -4xy^2$ $\left[y = \dfrac{5x^3}{4x^5 + c}\right]$

8 $y' - \dfrac{2}{x}y = (x - 3)y^2$ $\left[y = \dfrac{4x^2}{c - x^4 + 4x^3}\right]$