Concetti chiave e regole

I luoghi geometrici

Un **luogo geometrico** di punti è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che hanno una stessa proprietà *p*. Fra i luoghi di punti ricordiamo:

- l'asse di un segmento: luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
- la bisettrice di un angolo: luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

La circonferenza e il cerchio

La **circonferenza** è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso che si chiama centro; la distanza del centro da tutti i punti della circonferenza è il raggio. Il **cerchio** è invece il luogo dei punti che hanno distanza dal centro minore o uguale al raggio; esso è quindi la figura convessa che ha come contorno la circonferenza.
Si dimostra poi che per individuare una circonferenza sono necessari e sufficienti tre punti non allineati.

Elementi di una circonferenza e proprietà delle corde

In una circonferenza si possono individuare alcuni elementi:

- le **corde**, sono i segmenti che hanno per estremi due punti della circonferenza; la corda che passa per il centro si chiama diametro
- gli **archi**, sono le parti di circonferenza delimitate da due suoi punti
- gli **angoli al centro**, sono gli angoli che hanno il vertice nel centro della circonferenza.

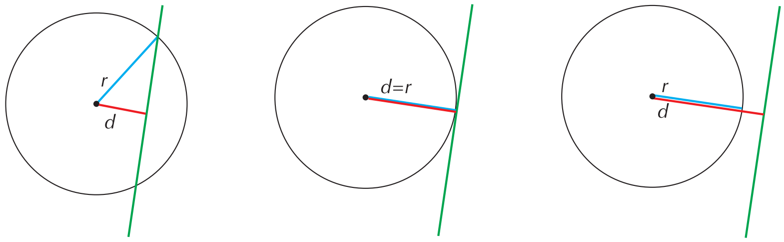
Si verifica che:

- ogni corda non passante per il centro è minore del diametro
- in una circonferenza l'asse di una corda passa per il centro e la perpendicolare ad una corda passante per il centro è asse della corda stessa
- in una circonferenza, ad angoli al centro congruenti corrispondono corde e archi congruenti e viceversa
- in una circonferenza corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro e viceversa e corde disuguali non hanno la stessa distanza dal centro, in particolare la corda maggiore ha una distanza minore dal centro.

Posizioni reciproche di rette e circonferenze

In uno stesso piano, una retta e una circonferenza non possono avere più di due punti in comune; indicata con d la distanza del centro della circonferenza dalla retta e con r il raggio si ha che la retta:

- è **secante** se $d < r$
- è **tangente** se $d \cong r$
- è **esterna** se $d > r$

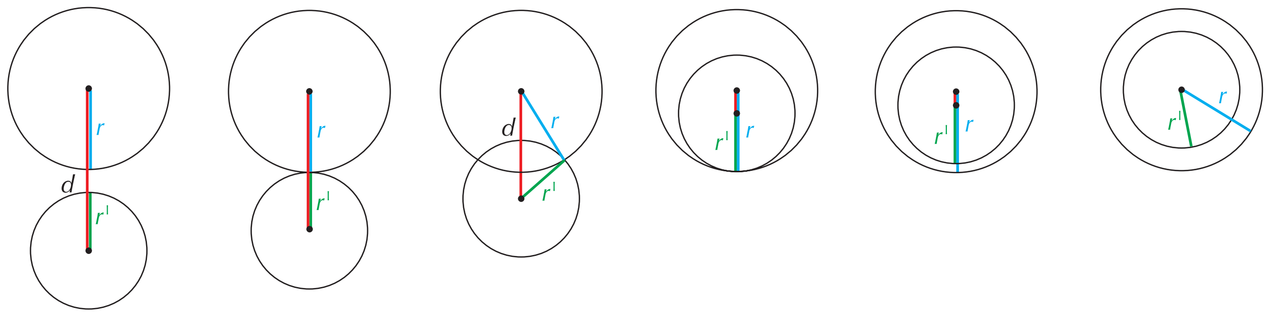


Valgono le seguenti proprietà:

- ogni retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza
- se da un punto esterno si conducono le due rette tangenti, i segmenti di tangenza sono congruenti e la retta che unisce il punto di tangenza con il centro è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti.

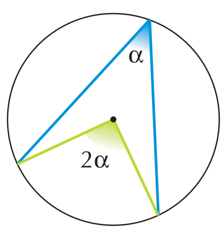
Anche due circonferenze distinte non possono avere più di due punti di intersezione; indicata con d la distanza fra i centri e con r e r' i due raggi (con $r > r'$) si ha che le due circonferenze sono:

- **esterne** se $d > r + r'$
- **tangenti esternamente** se $d \cong r + r'$
- **secanti** se $r - r' < d < r + r'$
- **tangenti internamente** se $d \cong r - r'$
- **interne** se $d < r - r'$
- **concentriche** se $d = 0$.



Angoli alla circonferenza e angoli al centro

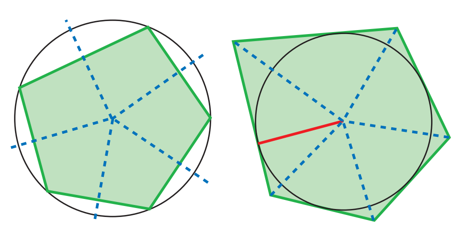
Ciascun angolo che ha il vertice sulla circonferenza e per lati due semirette secanti oppure una semiretta secante e l'altra tangente si dice **angolo alla circonferenza**.
Ad ogni angolo alla circonferenza corrisponde un angolo al centro che si ottiene tracciando le semirette dei raggi nei punti di intersezione dei lati dell'angolo con la circonferenza.
L'angolo al centro è sempre il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza.
Di conseguenza, tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono fra loro congruenti. In particolare, angoli che insistono su una semicirconferenza sono retti.



Poligoni inscritti e circoscritti

Un poligono si dice:

- **inscritto** in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza; la circonferenza, a sua volta, si dice circoscritta al poligono
- **circoscritto** a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza che, a sua volta, si dice inscritta nel poligono; il raggio della circonferenza è l'**apotema** del poligono.



Condizioni per l'inscrittibilità e la circoscrittibilità

Condizione necessaria e sufficiente perché un poligono sia:

- **inscrittibile** in una circonferenza è che gli assi dei suoi lati si intersechino nello stesso punto che è il centro della circonferenza
- **circoscrittibile** ad una circonferenza è che le bisettrici dei suoi angoli si intersechino nello stesso punto che è il centro della circonferenza.

Nel caso particolare in cui il poligono è un quadrilatero, oltre alle precedenti condizioni, valgono le seguenti:

- un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza se e solo se gli angoli opposti sono supplementari
- un quadrilatero è circoscrittibile a una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

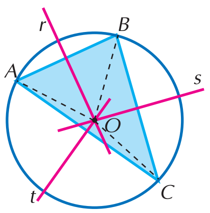
Vale inoltre che un poligono regolare è sempre inscittibile e circoscrittibile a una circonferenza e le due circonferenze inscritta e circoscritta hanno lo stesso centro.

Punti notevoli dei triangoli

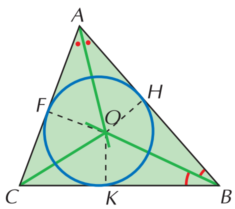
In ogni triangolo:

- gli assi dei lati si intersecano in uno stesso punto chiamato **circocentro** che è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo
- le bisettrici degli angoli si intersecano in uno stesso punto chiamato **incentro** che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo
- le altezze si intersecano in uno stesso punto chiamato **ortocentro**
- le mediane si incontrano in uno stesso punto detto **baricentro**; il baricentro divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

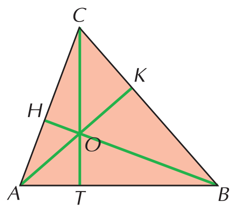
Il triangolo è quindi il solo poligono che è sempre sia inscrittibile che circoscrittibile a una circonferenza.



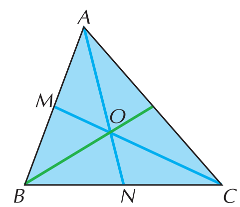
circocentro



incentro



ortocentro

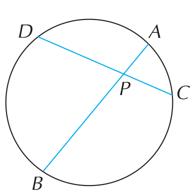


baricentro

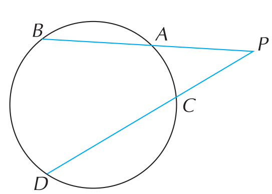
Le relazioni di proporzionalità nella circonferenza

Relativamente ad una circonferenza e alle sue corde, secanti e tangenti, valgono le seguenti proprietà:

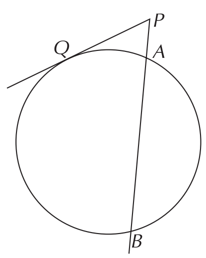
- se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti di una corda sono i medi, i segmenti dell'altra corda sono gli estremi di una proporzione
- se da un punto esterno si tracciano due secanti, una secante e la sua parte esterna sono i medi, l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione
- se da un punto esterno a una circonferenza si tracciano una secante e una tangente, il segmento di tangente è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.



① $DP : AP = PB : PC$



② $PC : PA = PB : PD$



③ $PB : PQ = PQ : PA$

La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

La lunghezza di una linea curva può essere definita mediante una poligonale approssimante con un numero infinito di lati. In particolare la lunghezza di una circonferenza è definita mediante i poligoni in essa inscritti e ad essa circoscritti.

Le formule per il calcolo della lunghezza C della circonferenza rettificata e dell'area S del cerchio sono:

- $C = 2\pi r$
- $S = \pi r^2$

Dalla proporzionalità fra angoli al centro α (in gradi) e archi ℓ e fra angoli al centro e settori circolari T si deducono poi le seguenti relazioni:

- $\ell = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360}$
- $T = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$