ARITMETICA

Le applicazioni della proporzionalità

PREREQUISITI

- conoscere le quattro operazioni e saper operare con esse
- conoscere il concetto di rapporto e di proporzione
- conoscere le regole per calcolare il termine incognito in una proporzione

CONOSCENZE

1. le grandezze direttamente e inversamente proporzionali
2. il problema del tre semplice (diretto ed inverso)
3. il problema del tre composto (diretto ed inverso)
4. i problemi di ripartizione semplice e composta
5. il concetto di percentuale
6. i problemi di matematica finanziaria

ABILITÀ

A. operare con grandezze direttamente e inversamente proporzionali
B. risolvere problemi del tre semplice e tre composto (diretto ed inverso)
C. risolvere problemi di ripartizione semplice e composta (diretta ed inversa)
D. risolvere problemi con le percentuali
E. risolvere semplici problemi di matematica finanziaria

Per Ricordare

La proporzionalità diretta ed inversa:

1. una grandezza è **costante** quando mantiene sempre lo stesso valore;
2. una grandezza è **variabile** quando il suo valore muta nel tempo;
3. due variabili sono **interdipendenti** quando il variare della prima modifica il valore della seconda: la variabile **indipendente** si indica generalmente con la lettera x; la variabile **dipendente** si indica generalmente con la lettera y;
4. una grandezza y è **direttamente proporzionale** ad un'altra x se il rapporto fra y e x è costante. In simboli: $\boldsymbol{y : x = k}$ (k si chiama **coefficiente di proporzionalità diretta**);
5. una grandezza y è **inversamente proporzionale** ad un'altra x se il prodotto fra y e x è costante. In simboli: $\boldsymbol{y \cdot x = k}$ (k si chiama **coefficiente di proporzionalità inversa**).

I problemi del tre semplice e del tre composto:

6. si dicono **problemi del tre semplice** quei problemi dove, date due grandezze, si conoscono tre valori e bisogna determinare il quarto; in particolare nei problemi del **tre semplice diretto** le grandezze che entrano in gioco sono **direttamente proporzionali**, nei problemi del **tre semplice inverso** le grandezze sono **inversamente proporzionali**;
7. per **risolvere i problemi del tre semplice**, dopo avere stabilito se le grandezze in esame sono direttamente o inversamente proporzionali, bisogna tracciare uno schema con le frecce in modo da stabilire l'ordine secondo cui deve essere scritta la proporzione e calcolare il termine incognito;
8. si dicono **problemi del tre composto** quei problemi in cui entrano in gioco almeno tre grandezze;
9. i problemi del tre composto possono essere **direttamente o inversamente proporzionali** a seconda che le grandezze considerate sono direttamente o inversamente proporzionali;

10. per **risolvere i problemi del tre composto** bisogna tracciare uno schema delle grandezze che entrano in gioco e, dopo aver stabilito se le grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali, tracciare le relative frecce. Per calcolare il valore dell'incognita bisogna quindi moltiplicare il valore noto per il rapporto di tutte le altre grandezze scritto seguendo il verso delle frecce.

I problemi di ripartizione:

11. i **problemi di ripartizione semplice** sono problemi dove bisogna dividere una grandezza in parti direttamente o inversamente proporzionali ad un gruppo di numeri;
12. per **risolvere i problemi di ripartizione semplice** (**diretta** ed **inversa**) bisogna applicare la proprietà del comporre relativa a una serie di rapporti e risolvere le proporzioni ottenute;
13. i problemi di **ripartizione composta** sono problemi in cui una grandezza o un numero si deve dividere in parti direttamente o inversamente proporzionali a più gruppi di numeri;
14. per **risolvere i problemi di ripartizione composta** (**diretta** ed **inversa**) occorre calcolare il prodotto delle grandezze che entrano in gioco nelle singole incognite e poi applicare la stessa procedura descritta nel punto 12.

Le percentuali:

15. la **percentuale** è un rapporto che ha come conseguente 100;
16. la proporzione risolutiva delle percentuali è $\boldsymbol{p : T = r : 100}$ dove p = parte percentuale; T = totale; r = tasso percentuale;
17. gli **areogrammi percentuali** permettono di rappresentare dati statistici percentuali per mezzo di grafici.

Elementi di matematica finanziaria:

18. il **capitale** è la somma prestata ad altri o depositata e si indica con C;
19. l'**interesse** è il compenso dato o ricevuto a chi presta o deposita un capitale e si indica con I;
20. il **tasso percentuale di interesse** o **ragione** è il compenso che si riceve ogni 100 unità di Euro e si indica con r;
21. il **tempo** è il periodo in cui si impiega il capitale e può quindi essere espresso in anni, mesi o giorni e si indica con t;
22. lo **sconto commerciale**, o più semplicemente lo **sconto**, è il compenso che un debitore ottiene per avere restituito il debito prima della scadenza e si indica con sc;
23. le formule per:
    a. il **calcolo dell'interesse** sono: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ (tempo in anni); $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ (tempo in mesi); $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ (tempo in giorni);
    b. il **calcolo del capitale** sono: $C = \frac{I \cdot 100}{r \cdot t}$ (tempo in anni); $C = \frac{I \cdot 1200}{r \cdot t}$ (tempo in mesi); $C = \frac{I \cdot 36000}{r \cdot t}$ (tempo in giorni);
    c. il **calcolo del tasso percentuale** sono: $r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t}$ (tempo in anni); $r = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot t}$ (tempo in mesi); $r = \frac{I \cdot 36000}{C \cdot t}$ (tempo in giorni);
    d. il **calcolo del tempo di capitalizzazione** sono: $t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r}$ (tempo in anni); $t = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot r}$ (tempo in mesi); $t = \frac{I \cdot 36000}{C \cdot r}$ (tempo in giorni);
    e. il **calcolo dello sconto** sono: $sc = \frac{Cd \cdot r \cdot t}{100}$ (tempo in anni); $sc = \frac{Cd \cdot r \cdot t}{1200}$ (tempo in mesi); $sc = \frac{Cd \cdot r \cdot t}{36000}$ (tempo in giorni);
    f. la **somma scontata** (indicata con Sc) è: $Sc = Cd - sc$;
24. la **cambiale** è un documento che il debitore rilascia al creditore impegnandosi a pagare alla data di scadenza. Essa è soggetta ad una tassa (imposta di bollo), che corrisponde al 12‰ dell'intero debito.

Esercizi di Conoscenza

1 Completa le seguenti frasi:
a. una grandezza si dice costante quando mantiene sempre lo ....;
b. una grandezza si dice variabile quando i valori che può assumere .... in base alle circostanze in cui vengono definiti;
c. due variabili si dicono interdipendenti quando le grandezze sono .... fra di loro in modo che al .... della prima, varia ....

2 Indica se le seguenti grandezze sono costanti (C) o variabili (V):
a. velocità della luce; C V
b. altezza di una montagna; C V
c. costo di una rivista; C V
d. peso specifico dell'acqua; C V
e. numero di alunni di una scuola. C V

3 Date le seguenti grandezze interdipendenti, indica qual è la variabile dipendente (y) e quale la variabile indipendente (x):
a. merce venduta e soldi incassati per la vendita;
b. somma depositata in banca ed interessi percepiti;
c. portata di un rubinetto e tempo impiegato a riempire una vasca;
d. cilindrata di un'autovettura e velocità massima raggiunta;
e. numero di alunni che partecipano ad una gita e costo della gita stessa.

4 Completa la seguente definizione:
due grandezze si dicono proporzionali quando il .... che le lega può essere espresso mediante una ....

5 Due grandezze variabili dipendenti x e y si dicono:
a. direttamente proporzionali se il .... fra y e x è costante;
b. inversamente proporzionali se il .... fra x e y è costante.

6 Indica fra le seguenti coppie di grandezze, quali sono direttamente proporzionali (D), quali inversamente proporzionali (I) e quali non proporzionali (N):
a. tragitto percorso da un treno e costo del biglietto; D I N
b. lato di un quadrato e perimetro dello stesso; D I N
c. numero di pagine di un quaderno e peso dello stesso; D I N
d. numero di operai per costruire una casa e tempo impiegato per la costruzione; D I N
e. altezza di una persona e suo peso. D I N

7 Completa la seguente frase:
date due grandezze, si dicono problemi del tre semplice quei problemi dove si conoscono .... valori e si deve calcolare il .... Quando le due grandezze sono direttamente proporzionali prendono il nome di .... Quando le due grandezze sono .... i problemi prendono il nome di tre semplice inverso.

8 Quante grandezze devono essere coinvolte in un problema perché venga definito del tre composto?

9 Completa le seguenti frasi:
a. nei problemi di ripartizione semplice viene richiesto di .... una grandezza in parti .... o .... proporzionali ad un gruppo di numeri;
b. i problemi di ripartizione composta sono problemi in cui una grandezza si deve .... in parti direttamente o inversamente proporzionali a .... di numeri.

10 Completa la seguente definizione:
la percentuale è un .... che ha come .... 100.

11 Data la proporzione $12 : 60 = 20 : 100$, stabilisci:
a. qual è il tasso percentuale;
b. qual è la parte percentuale;
c. qual è il totale.

12 Completa la seguente regola:
per calcolare l'angolo di un areogramma percentuale basta .... il tasso percentuale per il numero fisso ....

13 Il capitale è:
a. la somma prestata ad altri o depositata;
b. il compenso dato o ricevuto a chi presta o deposita un capitale;
c. il periodo in cui si impiega il capitale;
d. il compenso che si riceve per ogni 100 unità di euro prestate.

14 Completa le seguenti definizioni:
a. il montante rappresenta .... più .... nel corso del periodo di capitalizzazione;
b. lo sconto commerciale è il .... che un debitore ottiene per aver restituito il .... prima della scadenza.

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO BASE *

1 *Esercizio Svolto*

Le grandezze direttamente proporzionali

Dato il rapporto di proporzionalità diretta $\frac{y}{x} = 2$ costruisci la tabella che rappresenta il legame fra le grandezze x e y. Rappresenta inoltre le due grandezze nel piano cartesiano.

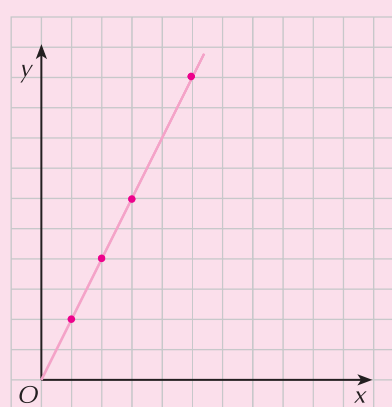
Svolgimento

Per costruire la tabella che rappresenta la proporzionalità diretta dobbiamo assegnare dei valori "a caso" alla variabile x e calcolare i corrispondenti valori di y. Così ad esempio:

- se $x = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{y}{1} = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2$
- se $x = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{y}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad y = 4$
- se $x = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{y}{3} = 2 \quad \rightarrow \quad y = 6$
- se $x = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{y}{5} = 2 \quad \rightarrow \quad y = 10$

Otteniamo dunque la tabella:

x	1	2	3	5
y	2	4	6	10



Con i dati della tabella possiamo rappresentare la relazione nel piano cartesiano.

2 *Esercizio Svolto*

Le grandezze inversamente proporzionali

Dato il rapporto di proporzionalità inversa $y \cdot x = 6$ costruisci la tabella che rappresenta il legame fra le grandezze x e y. Rappresenta inoltre le due grandezze nel piano cartesiano.

Svolgimento

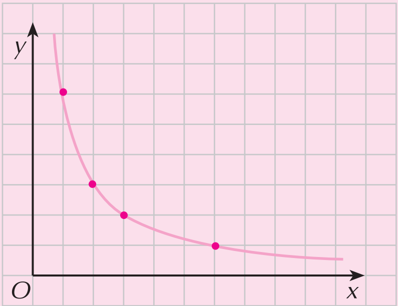
Per costruire la tabella che rappresenta la proporzionalità inversa dobbiamo assegnare dei valori "a caso" alla variabile x e calcolare i corrispondenti valori di y. Così ad esempio:

- se $x = 1 \quad \rightarrow \quad y \cdot 1 = 6 \quad \rightarrow \quad y = 6$
- se $x = 2 \quad \rightarrow \quad y \cdot 2 = 6 \quad \rightarrow \quad y = 3$
- se $x = 3 \quad \rightarrow \quad y \cdot 3 = 6 \quad \rightarrow \quad y = 2$
- se $x = 6 \quad \rightarrow \quad y \cdot 6 = 6 \quad \rightarrow \quad y = 1$

Otteniamo dunque la tabella:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Con i dati della tabella possiamo rappresentare la relazione nel piano cartesiano.



3 Dopo aver analizzato con attenzione i valori che assumono le grandezze x e y della seguente tabella, rispondi alle domande.

x	1	2	3
y	3	6	9

a. Le due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali?
b. Qual è il relativo coefficiente di proporzionalità?
c. Scrivi la relazione che lega le due grandezze e costruisci il grafico cartesiano.

4 Dopo aver analizzato con attenzione i valori che assumono le grandezze x e y della seguente tabella, rispondi alle domande.

x	1	2	4
y	16	8	4

a. Le due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali?
b. Qual è il relativo coefficiente di proporzionalità?
c. Scrivi la relazione che lega le due grandezze e costruisci il grafico cartesiano.

5 Utilizzando la relazione indicata, stabilisci se si tratta di proporzionalità diretta o inversa, completa la tabella e costruisci il relativo grafico cartesiano:

a. $\dfrac{y}{x} = 4$

x	1	2	3	4
y				

b. $x \cdot y = 10$

x	1	2	5	10
y				

6 *Esercizio Svolto*

La proporzionalità diretta e inversa

Considera le grandezze x = numeri di biglietti del cinema venduti e y = soldi incassati. Sapendo che il costo di ogni biglietto d'ingresso è di € 7:

a. indica se si tratta di proporzionalità diretta o di proporzionalità inversa;
b. indica la costante di proporzionalità;
c. costruisci la tabella che rappresenta la proporzionalità;
d. rappresenta con un grafico cartesiano la relazione.

Svolgimento

a. Le grandezze sono direttamente proporzionali;
b. La costante di proporzionalità si calcola mediante la serie di rapporti uguali:

$$k = 7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \frac{28}{4} = \dots\dots\dots$$

c. Per costruire la tabella basta considerare i rapporti del punto **b.** precedente:

x	1	2	3	4
y	7	14	21	28

d. Costruisci da solo il grafico cartesiano.

7 Considera le grandezze x = km percorsi e y = tempo impiegato a percorrerli. Sapendo che la velocità media di una persona che cammina è di 4 km/h:
a. indica se si tratta di proporzionalità diretta o di proporzionalità inversa;
b. indica la costante di proporzionalità;
c. costruisci la tabella che rappresenta la proporzionalità;
d. rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondente relazione.

8 *Esercizio Svolto*

I problemi del tre semplice

Nella sala di un cinema sono presenti 500 spettatori che hanno fatto incassare complessivamente € 3500. Quanti spettatori hanno assistito allo spettacolo precedente se il prezzo del biglietto è rimasto invariato e se l'incasso è stato di € 3605?

Svolgimento

Le due grandezze, soldi incassati e spettatori presenti, sono direttamente proporzionali. Tracciamo lo schema relativo inserendo le frecce con lo stesso verso in quanto si tratta di grandezze direttamente proporzionali.

Spettatori	**Incasso in euro**
↑ 500	↑ 3500
x	3605

Ricaviamo la relativa proporzione seguendo l'ordine delle frecce $x : 500 = 3605 : 3500$.
Calcoliamo il valore dell'incognita $x = 500 \cdot 3605 : 3500 = 515$.
Il numero di spettatori della prima proiezione è stato di 515.

9 Uno sportivo va in palestra e spende per 5 ingressi € 55. Sapendo che il prezzo per ogni ingresso è fisso, quanto spenderà lo sportivo se vuole fare 6 ingressi?

10 Per riempire una vasca con l'acqua versata da un rubinetto occorrono 3 ore; se invece di un rubinetto se ne possono usare 5 della stessa portata quanto tempo ci si impiega a riempire la stessa vasca?

11 *Esercizio Svolto*

I problemi del tre composto

Durante le ultime vacanze estive 6 amici si recano al mare e, per un soggiorno in pensione completa di 10 giorni, pagano complessivamente € 1500. Quanto avrebbero pagato, nello stesso albergo e nello stesso periodo, 8 amici per un soggiorno di 5 giorni?

Svolgimento

a. Rispetto al costo da trovare, le due grandezze (numero di amici e durata del soggiorno) sono direttamente proporzionali (D); tracciamo lo schema relativo inserendo le frecce con lo stesso verso:

Numero di amici	**Giorni del soggiorno**	**Costo in euro**
6	10	1500
↑ 8	↑ 5	↑ x
(**D**)	(**D**)	

b. Calcoliamo il valore incognito moltiplicando il valore noto per i rapporti delle grandezze seguendo la direzione delle frecce:

$$x = 1500 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{6} = 1000.$$

Il valore trovato rappresenta quanti Euro avrebbero speso 8 amici per un soggiorno di 5 giorni.

12 Sapendo che 3 operai in 5 giorni, lavorando 8 ore al giorno riescono a costruire un muro di cinta di una casa, quanti giorni impiegano 5 operai a fare lo stesso lavoro se lavorano 6 ore al giorno?

13 Un commerciante per acquistare una pezza di stoffa lunga 12 metri e larga 1 metro ha speso € 80. Quanto avrebbe speso se avesse acquistato una pezza dello stesso tipo lunga 18 metri e larga 0,80 metri?

14 *Esercizio Svolto*

La ripartizione semplice diretta

Esegui una ripartizione semplice diretta del numero 2145 secondo i numeri 15, 18 e 22.

Svolgimento

Indichiamo con x, y e z le parti in cui bisogna suddividere il numero 2145: poiché le parti sono direttamente proporzionali ai numeri 15, 18 e 22 possiamo scrivere la proporzione:

$$x : 15 = y : 18 = x : 22$$

Applicando la proprietà del comporre relativa ad una serie di rapporti otteniamo le tre proporzioni:

$(x + y + z) : (15 + 18 + 22) = x : 15$

$(x + y + z) : (15 + 18 + 22) = y : 18$

$(x + y + z) : (15 + 18 + 22) = z : 22$

Poichè $x + y + z = 2145$ sostituiamo le somme nelle proporzioni precedenti:

$2145 : 55 = x : 15$; $\quad 2145 : 55 = y : 18$; $\quad 2145 : 55 = z : 22$.

Risolviamo le tre proporzioni:

$x = 2145 \cdot 15 : 55 = 585$; $\quad y = 2145 \cdot 18 : 55 = 702$; $\quad z = 2145 \cdot 22 : 55 = 858$.

15 Esegui una ripartizione semplice diretta del numero 1224 secondo i numeri 12, 16 e 40.

16 *Esercizio Svolto*

La ripartizione semplice inversa

Esegui una ripartizione semplice inversa del numero 1886 secondo i numeri 4, 5 e 8.

Svolgimento

Indichiamo con x, y e z le parti in cui bisogna suddividere il numero 1886 e siccome bisogna fare una ripartizione inversa, si devono considerare gli inversi dei numeri dati. Otteniamo dunque la proporzione:

$$x : \frac{1}{4} = y : \frac{1}{5} = z : \frac{1}{8}$$

Applichiamo la proprietà del comporre relativa ad una serie di rapporti:

$$(x + y + z) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = x : \frac{1}{4}$$

$$(x + y + z) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = y : \frac{1}{5}$$

$$(x + y + z) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = z : \frac{1}{8}$$

Poichè $x + y + z = 1886$ e $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{23}{40}$ sostituiamo le somme nelle proporzioni precedenti:

$1886 : \frac{23}{40} = x : \frac{1}{4}$; $\quad 1886 : \frac{23}{40} = y : \frac{1}{5}$; $\quad 1886 : \frac{23}{40} = z : \frac{1}{8}$.

Risolviamo le tre proporzioni:

$x = 1886 \cdot \frac{1}{4} : \frac{23}{40} = 820$; $\quad y = 1886 \cdot \frac{1}{5} : \frac{23}{40} = 656$; $\quad z = 1886 \cdot \frac{1}{8} : \frac{23}{40} = 410$.

17 Esegui una ripartizione semplice inversa del numero 3875 secondo i numeri 2, 3 e 5.

18 *Esercizio Svolto*

La percentuale

Trasforma i seguenti rapporti nelle relative percentuali: **a.** $\frac{3}{5}$; **b.** $\frac{1}{4}$; **c.** $\frac{7}{16}$.

Svolgimento

Sostituiamo direttamente i dati nella proporzione risolutiva delle percentuali $p : T = r : 100$.

a. $3 : 5 = x : 100 \qquad x = 100 \cdot 3 : 5 = 60\%$;
b. $1 : 4 = x : 100 \qquad x = 100 \cdot 1 : 4 = 25\%$;
c. $7 : 16 = x : 100 \qquad x = 100 \cdot 7 : 16 = 43{,}75\%$.

19 Trasforma i seguenti rapporti nelle relative percentuali: **a.** $\frac{1}{5}$; **b.** $\frac{3}{8}$; **c.** $\frac{7}{10}$.

20 Trasforma i seguenti numeri decimali nei relativi rapporti e poi nelle corrispondenti percentuali: **a.** 0,2; **b.** 0,04; **c.** 0,35.

21 *Esercizio Svolto*

La parte percentuale

Stefano acquista un video gioco con uno sconto del 15%. Sapendo che il prezzo di listino era di € 70, calcola il costo effettivo del videogioco.

Svolgimento

Sostituendo i dati nella proporzione risolutiva $p : T = r : 100$, otteniamo $p : 70 = 15 : 100$ da cui $p = 15 \cdot 70 : 100 = 10{,}5$.
Per calcolare quanto Stefano ha pagato per il videogioco dobbiamo togliere dal prezzo di listino lo sconto € $(70 - 10{,}50) =$ € $59{,}50$.

22 Marco acquista un computer con uno sconto del 12%. Sapendo che il prezzo di listino era di € 1 115, calcola il costo effettivo del computer.

23 In una scuola si sono iscritti 140 alunni, il 45% dei quali sono maschi. Quante sono le ragazze iscritte?

24 *Esercizio Svolto*

Il tasso percentuale

Il prezzo di listino di un'autovettura è di € 13 550, ma è stata venduta a € 11 246,50. Calcola il tasso percentuale di sconto.

Svolgimento

Calcoliamo inizialmente $p = € \, (13550 - 11246{,}50) = € \, 2303{,}50$.
Sostituendo i dati nella proporzione $p : T = r : 100$ ricaviamo $2303{,}50 : 13550 = r : 100$ da cui $r = 2303{,}50 \cdot 100 : 13550 = 17$.
Pertanto il tasso percentuale di sconto è stato del 17%.

25 Il prezzo di listino di un divano è di € 1 750. Marco riesce ad ottenere uno sconto e compra il divano a € 1 487,50. Calcola il tasso percentuale di sconto.

26 Negli ultimi dieci anni la popolazione di un paese è passata da 6 400 a 7 552 abitanti. Calcola la percentuale di aumento della popolazione di quel paese.

27 *Esercizio Svolto*

L'interesse prodotto da un capitale

Calcola l'interesse prodotto da un capitale di € 2 100 in 3 anni al tasso percentuale del 3%.

Svolgimento

Sostituendo i dati nella relazione $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100}$ otteniamo $I = 2100 \cdot 3 \cdot \dfrac{3}{100} = € \, 189$.

L'interesse prodotto è dunque di € 189.

28 Calcola l'interesse prodotto da un capitale di € 2 400 in 4 mesi al tasso percentuale del 5%.

29 Calcola il capitale che ha prodotto un interesse di € 49 in 35 giorni al tasso percentuale del 4%.

30 Calcola il tempo impiegato da un capitale di € 3 600 per produrre un interesse di € 360 al tasso percentuale del 5%.

31 Calcola l'interesse prodotto da un capitale di € 3 600 in 65 giorni al tasso percentuale del 6%.

32 *Esercizio Svolto*

Il valore nominale

Sapendo che si è ottenuto uno sconto commerciale di € 13,50 al tasso del 6% per il pagamento in anticipo di 100 giorni di un debito, calcola il valore nominale.

Svolgimento

Sostituendo i dati nella relazione $Cd = \dfrac{sc \cdot 36\,000}{r \cdot t \text{ (giorni)}}$ otteniamo $Cd = \dfrac{13{,}50 \cdot 36\,000}{6 \cdot 100} = € \, 810$.

Il valore nominale è dunque di € 810.

33 Calcola il valore nominale di un debito pagato in anticipo di 150 giorni, sapendo che si è ottenuto uno sconto commerciale di € 10,60 al tasso dell'8%.

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO MEDIO **

1 *Esercizio Guidato*

La costante di proporzionalità (diretta e inversa)

Ponendo come costante una delle tre grandezze *base*, *altezza* e *area* di un triangolo, stabilisci se le altre due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali.

Svolgimento

a. Consideriamo costante la *base*; in questo caso l'altezza e l'area sono grandezze .... proporzionali, infatti: $2 \cdot b = \frac{A}{h}$ (il loro .... è costante).

b. Consideriamo costante l'*altezza*; in questo caso la base e l'area sono grandezze .... proporzionali, infatti: $2 \cdot h = \frac{A}{b}$ (il loro .... è costante).

c. Consideriamo costante l'*area*; in questo caso la base e l'altezza sono grandezze .... proporzionali, infatti: $2 \cdot A = b \cdot h$ (il loro .... è costante).

2 Ponendo come costante una delle tre grandezze velocità (v), spazio percorso (s), tempo impiegato a percorrerlo (t), stabilisci se le altre due grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali.

3 *Esercizio Guidato*

I problemi del tre semplice

Una dattilografa riesce a battere un testo di 8000 caratteri in 50 minuti. Quanto impiega per comporre un testo contenente 12400 caratteri?

Svolgimento

Le due grandezze (caratteri e tempo) sono grandezze .... proporzionali pertanto si possono rappresentare con lo schema:

Caratteri		**Tempo**	
8000	↑	50	↑
12400		x	

La proporzione risolutiva è dunque .... : 8000 = x : .....

La soluzione è x = ... · .... : 8000 = 77,50 minuti cioè 1^h .....^{m} .....^{s}.

4 Per realizzare 287 bomboniere sono necessari 57,4 m di stoffa. Fiammetta, per il suo matrimonio, deve realizzare 95 confezioni. Calcola quanta stoffa deve ordinare.

5 Una squadra di 20 muratori riesce ad ultimare la costruzione di un appartamento in 24 giorni. A causa di una malattia, al momento di iniziare la costruzione, ben 5 muratori risultano assenti. Quanto tempo è necessario per la costruzione dell'appartamento?
(Suggerimento: le due grandezze sono inversamente proporzionali)

6 *Esercizio Guidato*

I problemi del tre composto

Un'azienda è in grado di inscatolare 9 m^3 di mangime per cani in 1080 scatole del peso di 1,5 kg. Se decide di passare a delle confezioni di 3,6 kg, quante scatole dovrà utilizzare per inscatolare 12 m^3 di mangime?

Svolgimento

Indichiamo con (**D**) le grandezze direttamente proporzionali e con (**I**) le grandezze inversamente proporzionali. Otteniamo lo schema (da completare inserendo opportunamente le frecce):

Mangime (m^3)	Peso (kg)	Confezioni n°
9	1,5	↑ 1 080
12	3,6	x
(**D**)	(**I**)	

Pertanto $x = 1\,080 \cdot \frac{......}{......} \cdot \frac{.....}{.....} = 600.$

L'azienda dovrà dunque utilizzare 600 scatole.

7 In una mensa scolastica 96 alunni consumano 4 000 kg di pane in 200 giorni; quanti kg di pane consumano 120 alunni in 320 giorni?

8 Per costruire le fondamenta di una casa di 120 m^2 si utilizzano 75 m^3 di cemento che vengono posati per un'altezza di 62,5 cm. Avendo a disposizione 480 m^3 di cemento quanta superficie si riuscirà a realizzare se si decide di posare una soletta di 20 cm?

9 *Esercizio Guidato*

La ripartizione semplice

Suddividi il numero 1 040 in parti direttamente proporzionali ai numeri 4, 3 e 6.

Svolgimento

Indichiamo con x, y e z le tre parti da calcolare e, poiché devono essere .... proporzionali ai numeri 4, 3 e 6, possiamo scrivere la seguente serie di rapporti x : ..... = $y : 3$ = ... : .....

Applicando la proprietà del comporre relativa a una serie di rapporti uguali otteniamo le tre proporzioni

$(x + y + z) : (4 + ... + 6) = x : .....$
$(x + y + z) : (4 + ... + ...) = ... : 3$
$(x + y + z) : (..... + ... + 6) = z : .....$

Poiché $x + y + z$ = ... e $4 + ... + 6$ = ..., sostituiamo tali somme nelle proporzioni precedenti

$1\,040 : 13 = x : .....$ da cui $x = ... \cdot .... : 13 = 320$
...... : ...... = ... : 3 da cui $y = ... \cdot .... : ..... = ...$
...... : ...... = $z : 6$ da cui $z = ... \cdot 6 : ..... = ...$

Le tre parti in cui viene diviso il numero 1 040 sono rispettivamente 320, 240 e 480.

10 Suddividi il numero 3 600 in parti direttamente proporzionali ai numeri 3, 5 e 1.

11 Suddividi il numero 12 331 in parti inversamente proporzionali ai numeri 3, $\frac{4}{3}$ e 2.

(Suggerimento: occorre considerare la proporzione risolutiva $x : \frac{1}{3} = y : ..... = z : .....$)

12 Suddividi il numero 68 834 in parti inversamente proporzionali ai numeri $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$.

13 *Esercizio Guidato*

La ripartizione composta diretta

Suddividi il numero 4 325 in parti direttamente proporzionali ai seguenti gruppi di numeri 4, 2, $\frac{1}{2}$ e 5, $\frac{3}{2}$, 4.

Svolgimento

Predisponiamo il seguente schema in cui consideriamo .... dati:

Incognite	x	y	z
Primo gruppo di numeri	4	2	$\frac{1}{2}$
Secondo gruppo di numeri	5	$\frac{3}{2}$	4

Calcoliamo il prodotto dei numeri che compaiono sotto ciascuna incognita:

$x \rightarrow 4 \cdot .... = ...;\qquad y \rightarrow .... \cdot \frac{3}{2} = ...;\qquad z \rightarrow .... \cdot .... = ...$

Consideriamo quindi la relativa serie di ....

$x : .... = y : .... = z : ....$

Ci siamo così ridotti a un problema di ripartizione .... Procedendo come negli esercizi precedenti si ottiene ....

14 Suddividi il numero 25 728 in parti direttamente proporzionali ai seguenti gruppi di numeri $3, \frac{4}{3}, 5$ e $\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{5}$.

15 *Esercizio Guidato*

La ripartizione composta inversa

Suddividi il numero 10440 in parti inversamente proporzionali ai seguenti gruppi di numeri $2, 1, \frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}, 2, \frac{5}{3}$.

Svolgimento

Predisponiamo il seguente schema in cui consideriamo .... dei valori dati:

Incognite	x	y	z
Primo gruppo di numeri	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
Secondo gruppo di numeri	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$

Calcoliamo il .... dei numeri che compaiono sotto ciascuna incognita:

$x \rightarrow .... \cdot 4 = 2;\qquad y \rightarrow ..... \cdot ..... = \frac{1}{2};\qquad z \rightarrow ..... \cdot ..... = ...$

Consideriamo quindi la relativa serie di .... uguali:

$x : ..... = y : ..... = z : .....$

Procedendo come negli esercizi precedenti si ottiene ....

16 Suddividi il numero 6 773 in parti inversamente proporzionali ai seguenti gruppi di numeri $5, 2, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{10}, \frac{3}{2}, 2$.

17 Suddividi il numero 11 655 in parti direttamente proporzionali ai numeri 3, 4, 5 e in parti inversamente proporzionali ai numeri 1, 6, 2.
(Suggerimento: per ciascuna incognita devi considerare il prodotto del primo numero per l'inverso del secondo)

18 Suddividi il numero 6 154 in parti direttamente proporzionali ai numeri $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$, 5 e in parti inversamente proporzionali ai numeri $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, 5.

19 *Esercizio Guidato*

La percentuale

Un negoziante ha pagato una certa merce in contanti ottenendo così uno sconto del 12% su un prezzo di listino di € 312. Quanto è costata effettivamente la merce acquistata?

Svolgimento

Sostituiamo i dati nella proporzione risolutiva $p : T = r : 100$ e ricaviamo ..... : ...... = ... : 100 da cui $p =$ ..... · ..... : 100 = € ....

Per calcolare il costo effettivo dobbiamo sottrarre al prezzo di .... lo ....
€(...... − ......) = € ....

Pertanto il negoziante acquista quella merce pagando € 274,56.

20 Paolo ha una raccolta di monete; sapendo che 15 sono francesi e che rappresentano il 3% del numero totale, quante sono in tutto le monete?

21 *Esercizio Guidato*

Il valore totale

Un commerciante di abbigliamento ha dovuto vendere alcuni capi che presentavano piccoli difetti a € 5 000 con una riduzione dell'incasso del 15%. Calcola il costo dei capi se fossero stati venduti senza riduzione.

Svolgimento

In questo caso la riduzione del 15% si riferisce al prezzo .... pertanto € 5000 corrispondono a (100 − ......)% del prezzo non scontato (T). Avremo dunque la proporzione $5000 : T = 85 :$ ..... cioè $T = 5000 \cdot$ ..... : ..... = € 5882,35.

Pertanto il costo dei capi senza riduzione sarebbe stato di € 5 882,35.

22 Domenico ha comprato un appartamento e, dopo aver ottenuto uno sconto del 6%, lo paga € 155 100. Quale era il prezzo iniziale di vendita?

23 Ho pagato € 130 per la bolletta dell'acqua compreso di un 4% di mora per il ritardo di pagamento. Qual era l'importo effettivo della bolletta?

24 *Esercizio Guidato*

L'interesse prodotto da un capitale

Calcola l'interesse prodotto da un capitale di € 15 000 in 4 mesi al tasso percentuale del 5%. Che valore possediamo dopo tale periodo.

Svolgimento

Sapendo che $I = \frac{C \cdot ..... \cdot .....}{1200}$ otteniamo $I = \frac{15000 \cdot ..... \cdot .....}{..........} =$ € ....

Il montante è dunque $M = C + ... =$ € (15 000 + ...) = € ....

25 Calcola l'interesse prodotto da un capitale di € 2 500 al 3% per 7 mesi.

26 Calcola il capitale che ha prodotto un interesse di € 525 al tasso percentuale del 3,5% per 270 giorni.

27 Calcola il tasso percentuale applicato a un capitale di € 2500 che ha prodotto un interesse di € 35 per un anno.

28 Calcola il tempo, espresso in giorni, in cui è stato impiegato un capitale di € 26000 che ha prodotto un interesse di € 728 al tasso percentuale del 12%.

29 *Esercizio Guidato*

Il tasso percentuale di sconto

Una cambiale di € 9 500 viene pagata 60 giorni prima della scadenza. Calcola il tasso di sconto sapendo che sono stati versati € 9 452,50.

Svolgimento

Sapendo che $r = \dfrac{sc \cdot 36000}{..... \cdot .....}$ otteniamo $r = \dfrac{(9500 - ....) \cdot ....}{........... \cdot 60} = ...\%$

30 Un signore ha saldato un debito di € 3 450 tre mesi prima della scadenza pagando € 3 432,75. Calcola il tasso percentuale di sconto.

31 Una cambiale di € 15 000 viene pagata in anticipo di 4 mesi e viene scontata di € 120. Calcola il tasso percentuale di sconto.

32 Una cambiale viene pagata 45 giorni prima della scadenza con uno sconto di € 135 al tasso del 6%. Calcola il valore nominale della cambiale.

33 Una cambiale di € 12 500 viene pagato 80 giorni prima della scadenza. Calcola il tasso di sconto sapendo che sono stati versati € 12 200.

34 Una cambiale di € 24 000 viene pagata prima della scadenza, ottenendo così uno sconto di € 250 al tasso del 5%. Calcola di quanti giorni è stato anticipato il pagamento.

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO AVANZATO ***

1 Per piastrellare una stanza rettangolare di dimensioni 5 m e 4 m si sono spesi € 300. Quanto costerà piastrellare una stanza quadrata di lato 4 m?

2 Due ruote dentate di un ingranaggio ruotano una sull'altra. Se la più piccola ha 30 denti e fa 96 giri al minuto, quanti giri fa la più grande che ha 40 denti?

3 Per percorrere 30 km una macchina impiega 30 minuti. A che velocità procede? Se un'altra macchina si muove con una velocità di 50 km/h quanto tempo impiega per percorrere lo stesso spazio?

4 Per irrigare un giardino 5 spruzzi d'acqua restano accesi 2 ore al giorno per 3 giorni. Quanti giorni devono restare accesi 6 spruzzi della stessa portata se vengono attivati 1 ora al giorno?

5 Un'insegna luminosa ha 10 lampade che rimanendo accese per 12 notti per 5 ore a notte consumano 90 kwh. Calcola quanto consumeranno 6 lampade di potenza doppia, rimanendo accese per 15 notti per 3 ore a notte.

6 Esegui una ripartizione diretta del numero 15 312 secondo i numeri 0,2, $1,\overline{3}$ e 0,4.

7 Tre camerieri ricevono complessivamente in una serata € 252 di mancia. Sapendo che hanno lavorato rispettivamente per 6 h, 5 h e 3 h, quanto spetta a ciascuno?

8 Due soci costituiscono una società e versano la stessa cifra iniziale al 1° Gennaio; il 1° Aprile e il 1° Luglio subentrano un terzo socio e un quarto socio che versano la stessa cifra dei primi due. Calcola quanto spetta a ciascun socio se a fine anno l'utile è stato di € 17 550.

9 Determina la lunghezza di quattro segmenti sapendo che la loro somma è 177 cm e che le loro misure sono inversamente proporzionali ai numeri $\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 5$.

10 Esegui una ripartizione composta diretta del numero 5 208 secondo i gruppi di numeri $3; \frac{5}{2}; \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1$.

11 Esegui una ripartizione composta del numero 1 859 in ragione diretta dei numeri $0,\overline{3}; \frac{1}{4}; 2$ e in ragione inversa dei numeri $\frac{3}{4}; 1; \frac{1}{2}$.

12 Per ristrutturare una casa di riposo tre comuni decidono di investire una somma di € 656 000 in parti direttamente proporzionali al numero di abitanti ed in parti inversamente proporzionali alla distanza dei tre comuni dalla casa di riposo. Calcola la spesa che devono sostenere i tre comuni sapendo che hanno rispettivamente 12 000 abitanti, 9 300 abitanti e 10 500 abitanti e distano 4 km, 3 km e 5 km.

13 Una società mette in palio un premio di € 186 000 per i quattro migliori portieri del campionato di calcio; il premio deve essere suddiviso in ragione inversa al numero di reti subite ed in ragione diretta al numero di partite giocate. Calcola quanto spetta a ciascun portiere se hanno subito rispettivamente le seguenti reti, il primo 24, il secondo 28, il terzo 40 ed il quarto 42 e sono stati presenti rispettivamente in 38 partite, 36 partite, 30 partite e 34 partite.

14 Luca scambia 7 figurine di calcio. Sapendo che tali figurine sono l'1,4% del totale della sua raccolta, quante figurine possiede complessivamente Luca?

15 Un negoziante vende un paio di scarpe da ginnastica a € 81 con un guadagno del 35%. Quanto aveva pagato le scarpe il negoziante?

16 In un punto vendita di informatica il costo di un computer è di € 1 200, ma viene venduto al prezzo di € 1 020. E' più conveniente l'acquisto in questo negozio oppure in un altro negozio che pratica uno sconto del 16%?

17 Michele decide di investire i suoi risparmi e sceglie due diverse operazioni di investimento:
1. investe € 2 500 per 3 anni e ritira alla scadenza un interesse di € 150;
2. investe € 1 350 per 9 anni e 10 giorni al 3%.

Determina:
a. il tasso della prima operazione;
b. il montante relativo alla seconda operazione.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

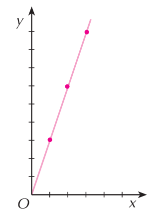
VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

1 **a.** stesso valore; **b.** cambiano; **c.** legate; variare; la seconda.
2 **a.** C; **b.** C; **c.** V; **d.** C; **e.** V.
3 **a.** y = soldi incassati, x = merce venduta;
b. y = interessi percepiti, x = somma depositata;
c. y = tempo impiegato a riempire una vasca, x = portata rubinetto;
d. y = velocità massima raggiunta da un'autovettura, x = cilindrata auto;
e. y = costo di una gita, x = numero degli alunni che partecipano.

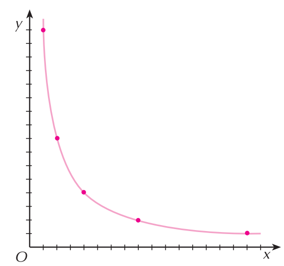
4 rapporto, proporzione numerica.
5 **a.** rapporto; **b.** prodotto.
6 **a.** D; **b.** D; **c.** D; **d.** I; **e.** N.
7 tre; quarto; tre semplice diretto; inversamente proporzionali.
8 almeno tre.
9 **a.** dividere, direttamente, inversamente; **b.** dividere; più gruppi.
10 rapporto, conseguente.
11 **a.** 20; **b.** 12; **c.** 60.
12 moltiplicare; 3,6°.
13 **a.**
14 **a.** il capitale; l'interesse maturato; **b.** compenso, debito.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO BASE

3 **a.** direttamente proporzionali; **b.** $k = 3$; **c.** $\frac{y}{x} = 3$;

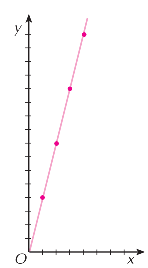


4 **a.** inversamente proporzionali; **b.** $k = 16$; **c.** $x \cdot y = 16$;



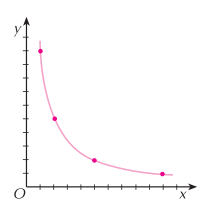
5 **a.** proporzionalità diretta

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16



b. proporzionalità inversa

x	1	2	5	10
y	10	5	2	1

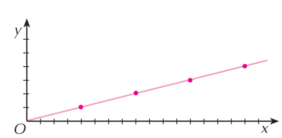


7 **a.** proporzionalità diretta; **b.** $k = 4$;

c.

x	4	8	12	16
y	1	2	3	4

d.



9 € 66.
10 36 minuti.
12 4 giorni.
13 € 96.
15 216; 288; 720.
17 1875; 1250; 750.
19 **a.** 20%; **b.** 37,5%; **c.** 70%.
20 **a.** 20%; **b.** 4%; **c.** 35%.
22 € 981,20.
23 77.
25 15%.
26 18%.
28 € 40.
29 € 12600.
30 2 anni.
31 € 39.
33 € 318.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO MEDIO

1 **a.** direttamente; rapporto; **b.** direttamente; rapporto; **c.** inversamente; prodotto.
2 v costante: direttamente proporzionali; s costante: inversamente proporzionali; t costante: direttamente proporzionali.
3 direttamente; $12400 : 8000 = x : 50$; $x = 50 \cdot 12400 : 8000 = 77{,}50$; $1^{h}17^{m}30^{s}$.
4 19 m.
5 32 giorni.
6 mangime (**D**); peso (**I**); $x = 1080 \cdot \frac{1{,}5}{3{,}6} \cdot \frac{12}{9} = 600$.
7 8000 kg.
8 2400 m^2.
9 direttamente; $x : 4 = y : 3 = z : 6$;
$(x + y + z) : (4 + 3 + 6) = x : 4$; $(x + y + z) : (4 + 3 + 6) = y : 3$; $(x + y + z) : (4 + 3 + 6) = z : 6$;
$x + y + z = 1040$; $4 + 3 + 6 = 13$; $1040 : 13 = x : 4$; $x = 4 \cdot 1040 : 13 = 320$; $1040 : 13 = y : 3$;
$y = 1040 \cdot 3 : 13 = 240$; $1040 : 13 = z : 6$; $z = 1040 \cdot 6 : 13 = 480$.
10 1200; 2000; 400.
11 2596; 5841; 3894.
12 24390; 21680; 22764.
13 i valori; $x \rightarrow 4 \cdot 5 = 20$; $y \rightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$; $z \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$; rapporti uguali; $x : 20 = y : 3 = z : 2$; semplice diretta; 3460; 519; 346.
14 16080; 6432; 3216.
15 gli inversi; prodotto; $x \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$; $y \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $z \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; rapporti;
$x : 2 = y : \frac{1}{2} = z : \frac{2}{5}$; 7200; 1800; 1440.
16 3126; 521; 3126.
17 5670; 1260; 4725.
18 4344; 724; 1086.
19 $p : 312 = 12 : 100$; $p = 312 \cdot 12 : 100 =$ € 37,44; listino; sconto; € $(312 - 37{,}44) =$ € 274,56.
20 500.
21 non scontato; $(100 - 15)\%$; $5000 : T = 85 : 100$; $T = 5000 \cdot 100 : 85 =$ € 5882,35.
22 € 165000.
23 € 125.
24 $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$; $I = \frac{15000 \cdot 5 \cdot 4}{1200} =$ € 250; $M = C + I =$ € $(15000 + 250) =$ € 15250.
25 € 43,75.
26 € 20000.
27 1,4%.
28 84 giorni.
29 $r = \frac{sc \cdot 36000}{Cd \cdot t}$; $r = \frac{(9500 - 9452{,}50) \cdot 36000}{9500 \cdot 60} = 3\%$.
30 2%.
31 2,4%.
32 € 18000.
33 10,8%.
34 75 giorni.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO AVANZATO

1 € 240.
2 72.
3 60 km/h; 25 minuti.
4 5 giorni.
5 81 kwh.
6 1584; 10560; 3168.
7 € 108; € 90; € 54.
8 € 5400; € 5400; € 4050; € 2700.
9 60 cm; 90 cm; 18 cm; 9 cm.
10 3024; 1680; 504.
11 176; 99; 1584.
12 € 240000; € 248000; € 168000.
13 € 66500; € 54000; € 31500; € 34000.
14 500.
15 € 60.
16 è più conveniente il punto vendita dove lo sconto è del 16%.
17 **a.** 2%; **b.** € 1715,63.