

## L'ellisse come dilatazione di una circonferenza

Consideriamo la circonferenza avente centro nell'origine e raggio  $r$  la cui equazione è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ed applichiamo ad essa la dilatazione di equazioni  $\begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases}$  operando le sostituzioni  $\begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{k} \\ y \rightarrow \frac{y}{h} \end{cases}$

L'equazione che otteniamo è la seguente:

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{h^2} = r^2 \quad \text{che possiamo riscrivere nella forma} \quad \frac{x^2}{k^2 r^2} + \frac{y^2}{h^2 r^2} = 1$$

Quella che abbiamo ottenuto è l'equazione di un'ellisse che ha semiassi uguali a  $kr$  sull'asse  $x$  e semiassi uguali a  $hr$  sull'asse  $y$ .

Un'ellisse può quindi anche essere vista come la corrispondente di una circonferenza mediante l'applicazione di una dilatazione.

Per esempio:

- applicando alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 4$  la dilatazione di fattori  $k = 2$  e  $h = 3$  otteniamo:

$$\text{sostituzioni} \quad x \rightarrow \frac{x}{2} \quad y \rightarrow \frac{y}{3}$$

$$\text{equazione} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4 \quad \text{cioè} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

che è l'ellisse con i fuochi sull'asse  $y$  di semiassi 4 e 6 (**figura 1a**)

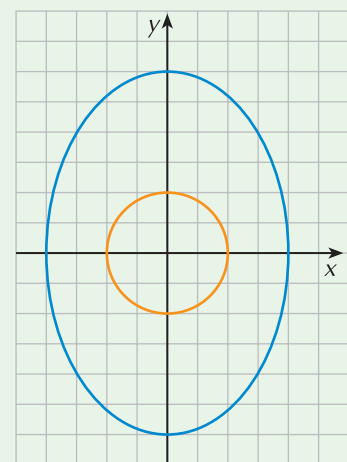
- applicando alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 16$  la dilatazione di fattori  $k = \frac{2}{3}$  e  $h = \frac{1}{4}$  otteniamo:

$$\text{sostituzioni} \quad x \rightarrow \frac{3}{2}x \quad y \rightarrow 4y$$

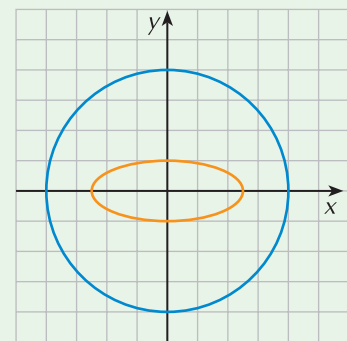
$$\text{equazione} \quad \frac{9}{4}x^2 + 16y^2 = 16 \quad \text{cioè} \quad \frac{x^2}{\frac{64}{9}} + y^2 = 1$$

che è l'ellisse con i fuochi sull'asse  $x$  di semiassi  $\frac{8}{3}$  e 1 (**figura 1b**).

**Figura 1**



**a.**



**b.**

## ESERCIZI

Scrivi le equazioni delle ellissi che ottieni applicando alla circonferenza assegnata la dilatazione indicata.

$$1 \quad x^2 + y^2 = 16 \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1 \right]$$

$$2 \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{5}x \\ y' = y \end{cases} \quad [25x^2 + y^2 = 25]$$

$$3 \quad 9x^2 + 9y^2 = 1 \quad \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases} \quad \left[ x^2 + \frac{9y^2}{16} = 1 \right]$$

$$4 \quad x^2 + y^2 = 8 \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases} \quad [9x^2 + 16y^2 = 8]$$

$$5 \quad x^2 + y^2 = 20 \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x \\ y' = 3y \end{cases} \quad \left[ \frac{9x^2}{5} + \frac{y^2}{180} = 1 \right]$$

Determina le equazioni della trasformazione che, applicate alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  fanno ottenere l'ellisse assegnata.

### 6 ESERCIZIO GUIDATO

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Le sostituzioni da operare sull'equazione  $x^2 + y^2 = 1$  sono  $x \rightarrow \frac{x}{2}$  e  $y \rightarrow \frac{y}{3}$

Quindi le equazioni della trasformazione sono  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$

$$7 \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad [x' = 4x, y' = 2\sqrt{2}y]$$

$$8 \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad [x' = 5x, y' = 4y]$$

$$9 \quad \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad \left[ x' = \frac{3}{2}x, y' = \sqrt{6}y \right]$$

$$10 \quad \text{Scrivi le equazioni di una dilatazione che trasforma l'ellisse di equazione } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ nella circonferenza di equazione } x^2 + y^2 = 16. \quad \left[ x' = \frac{2}{3}x, y' = y \right]$$