

I sistemi di equazioni goniometriche

Vediamo di seguito alcuni esempi di risoluzione di sistemi di equazioni in cui compaiono anche le funzioni goniometriche. I metodi di risoluzione sono gli stessi usati per i sistemi algebrici e applicano i principi di sostituzione e riduzione.

ESEMPI

$$1. \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ \tan x + \tan y = \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda $\begin{cases} x = 90^\circ - y \\ \tan(90^\circ - y) + \tan y = \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ - y \\ \cotan y + \tan y = \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ - y \\ 3 \tan^2 y - 4\sqrt{3} \tan y + 3 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\tan y = \begin{cases} \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Il sistema dà origine ai due seguenti

$$\begin{cases} x = 90^\circ - y \\ \tan y = \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 90^\circ - y \\ \tan y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 30^\circ + k180^\circ \end{cases} \vee \begin{cases} y = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 60^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di riduzione e sottraiamo membro a membro le due equazioni; otteniamo così

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La prima equazione è lineare; le sue soluzioni sono: $x = 90^\circ + k360^\circ \vee x = 180^\circ + k360^\circ$

Il sistema si scompone allora nei due seguenti $\begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 180^\circ + k360^\circ \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 180^\circ + k360^\circ \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$

Il secondo sistema è impossibile perché $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 > 1$ e quindi ricaviamo che $\begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ y = \pm 45^\circ + h360^\circ \end{cases}$

ESERCIZI

$$1 \quad \begin{cases} \cos x - \sqrt{2} \cos y = 0 \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \pm 45^\circ + k_1 360^\circ \\ y = \pm 60^\circ + k_2 360^\circ \end{cases} \right]$$

$$2 \quad \begin{cases} \sqrt{3} \sin x = -\sin y \\ \sin x + \sin y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \vee y = -\frac{2}{3}\pi + 2k_2\pi \end{cases} \right]$$

$$3 \quad \begin{cases} 3 \tan x + \tan y = 0 \\ \tan x + \tan y = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 150^\circ + k_1 180^\circ \\ y = 60^\circ + k_2 180^\circ \end{cases} \right]$$

$$4 \quad \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 30^\circ + k_1 360^\circ \vee x = 150^\circ + k_1 360^\circ \\ y = 30^\circ + k_2 360^\circ \vee y = 150^\circ + k_2 360^\circ \end{cases} \right]$$

$$5 \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \pm 135^\circ + k_1 360^\circ \\ y = \pm 45^\circ + k_2 360^\circ \end{cases} \right]$$

$$6 \quad \begin{cases} \sin y - \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x - \sin y = 2 \end{cases} \quad [S = \emptyset]$$

$$7 \quad \begin{cases} 2 \sin x + 2 \sin y = 1 \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = k_2\pi \end{cases} \right]$$

$$8 \quad \begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos y = \frac{3}{2} \\ \sin x - \sqrt{3} \cos y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = k_1\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \right]$$

$$9 \quad \begin{cases} \sin x + 2 \cos y = \frac{3}{2} \\ \sin x - \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \right]$$

$$10 \quad \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x \cos y = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \right]$$

$$11 \quad \begin{cases} 3 \tan x + 3 \cotan y = 2\sqrt{3} \\ 3 \tan x \cotan y = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 30^\circ + k_1 180^\circ \\ y = 60^\circ + k_2 180^\circ \end{cases} \right]$$

$$12 \quad \begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi \\ \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \right]$$

(Suggerimento: ricava x oppure y dalla prima equazione e sostituisci nella seconda)

$$13 \quad \begin{cases} x + y = 60^\circ \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 15^\circ + k 360^\circ \\ y = 45^\circ + k 360^\circ \end{cases} \vee \begin{cases} x = 225^\circ + k 360^\circ \\ y = -165^\circ + k 360^\circ \end{cases} \right]$$

$$14 \quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = k\pi \end{cases} \right]$$

$$15 \quad \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 45^\circ + k180^\circ \\ y = 45^\circ + k180^\circ \end{cases} \right]$$

$$16 \quad \begin{cases} x - y = 30^\circ \\ 2 \sin x + 2 \sin y = \sqrt{3} + 2 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 120^\circ + k360^\circ \\ y = 90^\circ + k360^\circ \end{cases} \vee \begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ y = 60^\circ + k360^\circ \end{cases} \right]$$

$$17 \quad \begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \frac{5}{6}\pi + k\pi \end{cases} \right]$$

$$18 \quad \begin{cases} x - y = \frac{3}{2}\pi \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{7}{4}\pi + k\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \right]$$

19 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} x + y = 60^\circ \\ \tan(x - y) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $\tan(x - y) = 1$ è soddisfatta se $x - y = 45^\circ + k180^\circ$.

Dunque il sistema dato è equivalente al seguente $\begin{cases} x + y = 60^\circ \\ x - y = 45^\circ + k180^\circ \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 52^\circ 30' + k90^\circ \\ y = 7^\circ 30' + k90^\circ \end{cases} \right]$

$$20 \quad \begin{cases} x - y = 20^\circ \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 40^\circ + k180^\circ \\ y = 20^\circ + k180^\circ \end{cases} \vee \begin{cases} x = -20^\circ + k180^\circ \\ y = -40^\circ + k180^\circ \end{cases} \right]$$

$$21 \quad \begin{cases} x + y = 0^\circ \\ \tan(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = 15^\circ + k90^\circ \\ y = -15^\circ + k90^\circ \end{cases} \right]$$

22 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dalla prima delle due equazioni ricaviamo che $(x + y) = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$

dalla seconda che $(x - y) = \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi \quad \vee \quad (x - y) = -\frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$

Combinando la prima equazione con ciascuna delle seconde otteniamo i due sistemi da risolvere.

$$\left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + (k_1 - k_2)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + (k_1 - k_2)\pi \end{cases} \right]$$

$$23 \begin{cases} \sin(x - y) = 0 \\ \tan(x + y) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k_1 + k_2) \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + (k_2 - k_1) \frac{\pi}{2} \end{cases} \right]$$

$$24 \begin{cases} \cos(x + y) = 0 \\ \cotan(x - y) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + (k_1 + k_2) \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + (k_1 - k_2) \frac{\pi}{2} \end{cases} \right]$$

$$25 \begin{cases} \sin(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{24}\pi + (k_1 + k_2)\pi \\ y = -\frac{\pi}{24} + (k_1 - k_2)\pi \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{24} + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \frac{7}{24}\pi + (k_1 - k_2)\pi \end{array} \right. \vee \\ \vee \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{24}\pi + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \frac{13}{24}\pi + (k_1 - k_2)\pi \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{13}{24}\pi + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \frac{5}{24}\pi + (k_1 - k_2)\pi \end{array} \right. \end{array} \right]$$