

## Le equazioni omogenee

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **omogenea** se si presenta nella forma

$$y' = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$$

essendo  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  funzioni omogenee dello stesso grado  $n$  definite nello stesso insieme  $D$ .

È per esempio omogenea l'equazione  $y' = \frac{xy - 2y^2}{x^2}$  perché sia il numeratore che il denominatore sono omogenei di grado 2.

Una qualunque equazione omogenea del primo ordine si può sempre scrivere nella forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

La precedente equazione, separando i termini, diventa  $y' = \frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$ .

Per risolvere questo tipo di equazioni operiamo la sostituzione  $t(x) = \frac{y(x)}{x}$

Con questa posizione si ha che:  $y = x \cdot t \rightarrow y' = xt' + t$

e quindi l'equazione di partenza  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

diventa  $xt' + t = f(t)$  cioè  $xt' = f(t) - t$  che è un'equazione a variabili separabili.

Applicando questa sostituzione alla precedente equazione otteniamo:

$$xt' = (t - 2t^2) - t \quad \text{cioè} \quad xt' = -2t^2$$

Separiamo le variabili:  $\frac{t'}{t^2} = -\frac{2}{x} \rightarrow \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x}$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{t^2} dt = - \int \frac{2}{x} dx \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{t} = -2 \ln |x| + c \quad \rightarrow \quad \ln |x| = \frac{1}{2t} + \frac{c}{2}$$

Operando la sostituzione inversa otteniamo:  $\ln |x| = \frac{x}{2y} + c_1$  dove abbiamo posto  $c_1 = \frac{c}{2}$

da cui infine:  $y = \frac{x}{2(\ln |x| - c_1)}$ .

Osserviamo poi che anche la funzione  $y = 0$  (che corrisponde al caso  $t = 0$ ) è soluzione dell'equazione data; essa si ottiene per  $c_1 \rightarrow \infty$ .

## 1 ESERCIZIO GUIDATO

$$y' = \frac{3y^2 - 4xy + 5x^2}{x^2 - 2xy}$$

Per risolvere un'equazione omogenea la si deve ricondurre alla forma  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Operiamo allora inizialmente sull'equazione in modo da evidenziare la forma tipica:

$$y' = \frac{5x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{x^2 \left(5 - 4\frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - 2\frac{y}{x}\right)} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 5}{-2\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$$

Operiamo la sostituzione  $t = \frac{y}{x}$  ( $t$  e  $y$  sono funzioni di  $x$ ); si ha così:  $y = xt$  e  $y' = xt' + t$ .

L'equazione assume la forma

$$xt' + t = \frac{3t^2 - 4t + 5}{-2t + 1} \quad \text{cioè} \quad xt' = \frac{5(t^2 - t + 1)}{1 - 2t}$$

Separiamo le variabili:  $\frac{1 - 2t}{5(t^2 - t + 1)} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\text{Integriamo: } \int \frac{1 - 2t}{5(t^2 - t + 1)} dt = \int \frac{1}{x} dx$$

Al primo membro si ottiene:  $-\frac{1}{5} \ln(t^2 - t + 1)$

Al secondo membro si ottiene:  $\ln|x| + c$

L'integrale generale è quindi:  $-\frac{1}{5} \ln(t^2 - t + 1) = \ln|x| + c$

Opera adesso la sostituzione inversa e determina l'integrale generale. [ $x^5 - x^4y + x^3y^2 + k = 0$ ]

$$2 \quad y' = \frac{x + y}{x} \qquad y' = \frac{y^2 - xy}{x^2} \qquad \left[ y = x \ln|x| + cx; y = \frac{2x}{1 - kx^2} \right]$$

$$3 \quad y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2} \qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} \qquad \left[ y = \frac{x^4 + 2kx}{k - x^3}; y = \pm \sqrt{cx^2 - 2x^2 \ln|x|} \right]$$

$$4 \quad y' = \frac{y^3 - x^2y + xy^2}{x^3} \qquad y' = \frac{x - 2y}{x} \qquad \left[ (y + 2x)(y - x)^2 = kx^6y^3; y = \frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2} \right]$$

$$5 \quad y' = \frac{2y^2 + xy}{x^2} \qquad y' = \frac{2y^2 + xy - x^2}{x^2 + 2xy} \qquad [2y \ln|x| + 2cy + x = 0; y^2 + xy + x^2 \ln|x| + cx^2 = 0]$$

$$6 \quad y' = -\frac{y^4 + y^3x + 3x^2y^2 + x^3y + 2x^4}{x^4 + x^2y^2} \qquad \left[ -\arctan\left(1 + \frac{y}{x}\right) + c = \ln|x| \right]$$

(Suggerimento: dopo aver fatto la sostituzione  $t = \frac{y}{x}$  ed aver scritto l'equazione nella forma  $xt' = \dots\dots$  puoi semplificare la frazione ottenuta)