Approfondimento

Il confronto tra funzioni goniometriche

Possiamo risolvere sfruttando ancora la circonferenza goniometrica anche quelle equazioni che prevedono di confrontare il seno, il coseno o la tangente di due angoli.

Equazioni della forma sin α = sin β

Due angoli hanno lo stesso seno se e solo se sono congruenti oppure se sono supplementari, a meno del periodo (***figura 1***).
Le soluzioni dell'equazione $\sin\alpha = \sin\beta$ sono dunque le seguenti:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \qquad \vee \qquad \alpha + \beta = \pi + 2k\pi$$

Esempio: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

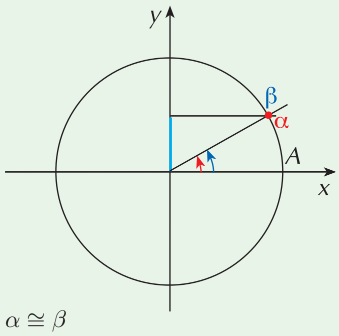
In questa equazione: $\alpha = 2x + \frac{\pi}{6}$ e $\beta = x - \frac{\pi}{3}$

Le soluzioni si ottengono risolvendo rispetto a x le seguenti due equazioni:

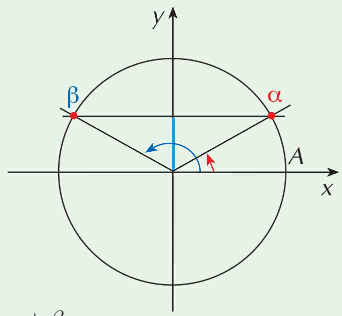
- i due angoli sono uguali: $2x + \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- i due angoli sono supplementari: $2x + \frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 3x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Figura 1



$\alpha \cong \beta$



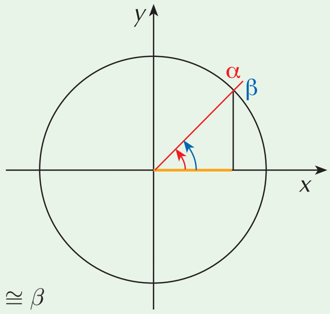
$\alpha + \beta = \pi$

Equazioni della forma cos α = cos β

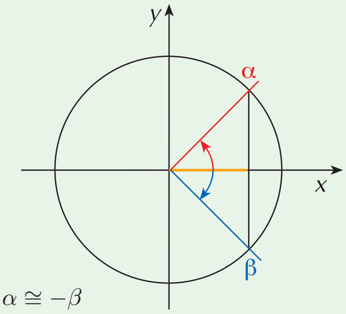
Due angoli hanno lo stesso coseno se e solo se sono congruenti oppure se sono opposti, a meno del periodo (***figura 2***).
Le soluzioni dell'equazione $\cos\alpha = \cos\beta$ sono dunque le seguenti:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \qquad \vee \qquad \alpha = -\beta + 2k\pi$$

Figura 2



$\alpha \cong \beta$



$\alpha \cong -\beta$

Esempio: $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

In questa equazione: $\alpha = 2x$ e $\beta = x - \frac{\pi}{6}$

Le soluzioni si ottengono risolvendo rispetto a x le seguenti due equazioni:

- i due angoli sono uguali: $2x = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
- i due angoli sono opposti:

$$2x = -\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$$

Equazioni della forma $\tan\alpha = \tan\beta$

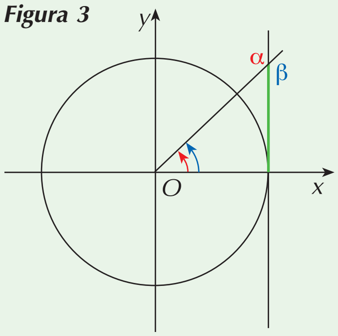
Due angoli hanno la stessa tangente se e solo se sono congruenti a meno del periodo (***figura 3***); le soluzioni di questa equazione sono quindi date da:

$$\alpha = \beta + k\pi$$

con la condizione che le due tangenti, al primo e al secondo membro esistano, cioè che sia

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Figura 3



Esempio: $\tan\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

L'equazione esiste se sono verificate le condizioni:

$$x - \frac{2}{3}\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad 3x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{cioè} \qquad x \neq \frac{7}{6}\pi + \pi k \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$$

Imponiamo l'uguaglianza tra i due angoli:

$$x - \frac{2}{3}\pi = 3x + \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \rightarrow \quad 2x = -\frac{5}{6}\pi + k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{5}{12}\pi - k\frac{\pi}{2}$$

Le soluzioni trovate sono accettabili.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni della forma $\sin\alpha = \sin\beta$.

1 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\left[-\frac{5}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{13}{36}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right]$

2 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ $\left[\frac{7}{36}\pi + \frac{2}{3}k\pi;\ -\frac{11}{12}\pi + 2k\pi\right]$

3 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$ $\left[-\frac{12}{35}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{35}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right]$

4 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right)$ $\left[\frac{3}{40}\pi + k\frac{\pi}{2}\right]$

5 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi + x\right)$ $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni della forma $\cos\alpha = \cos\beta$.

6 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 3x\right)$ $\left[\frac{11}{60}\pi + \frac{2}{5}k\pi;\ \frac{5}{12}\pi + 2k\pi\right]$

7 $\cos(x + 60°) = \cos(20° - x)$ $[-20° + k180°]$

8 $\cos(x + 10°) = \cos(20° + x)$ $[-15° + k180°]$

9 $\cos(x + 18°) = \cos(x - 36°)$ $[9° + k180°]$

10 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni della forma $\tan\alpha = \tan\beta$.

11 $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[x = \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\right]$

12 $\tan x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $[\varnothing]$

13 $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$ $\left[\frac{11}{48}\pi + k\frac{\pi}{2}\right]$

14 $\tan(2x - 20°) = \tan(x - 30°)$ $[-10° + k180°]$

15 $\tan(30° - x) = \tan(2x - 45°)$ $[25° + k60]$

16 $\tan x = \tan(20° - 3x)$ $[5° + k45°]$

Risolvi le seguenti equazioni in cui vengono confrontate funzioni diverse.

17 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

Ricordando che $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, puoi dire che $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{5}\right)$ e quindi riscrivere l'equazione assegnata nella forma:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7}{10}\pi - x\right)$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

18 $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ $\left[\frac{7}{16}\pi + k\pi\right]$

19 $-\cos x = \sin(x - 15°)$ $[142°30' + k180°]$

20 $\cos(2x - 30°) = \sin(x + 60°)$ $[k360°;\ 20° + k120°]$

21 $\cos(2x - 45°) = -\cos(3x + 60°)$ $[33° + k72°;\ 75° + k360°]$