

# I NUMERI RAZIONALI

## LA FRAZIONE COME NUMERO RAZIONALE ASSOLUTO

### richiami della teoria

- La frazione **generatrice** è la frazione che dà origine ad un numero decimale;
- dividendo il numeratore per il denominatore di una frazione otteniamo un numero **naturale** se la frazione è apparente, un numero **decimale** se la frazione non è apparente;
- un numero è **decimale limitato** se dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene come resto zero;
- una frazione **decimale** ha per denominatore una potenza di dieci; tutte le altre frazioni si dicono **ordinarie**;
- una frazione che ha il denominatore composto esclusivamente dai fattori primi 2 e 5 (o da una loro potenza) si trasforma sempre in un numero decimale limitato;
- un numero è decimale **periodico semplice** se, dividendo il numeratore per il denominatore, si ottiene, dopo la parte intera, una cifra (o un gruppo di cifre) che si ripete all'infinito; la cifra che si ripete si chiama **periodo**;
- un numero è decimale **periodico misto** se, dividendo il numeratore per il denominatore, si ottiene, dopo la parte intera, una cifra (o un gruppo di cifre) che non si ripete e una cifra (o un gruppo di cifre) che si ripete all'infinito; la cifra (o il gruppo di cifre) che si ripete si chiama **periodo**, la cifra (o le cifre) che non si ripete si chiama **antiperiodo**;
- una frazione che ha il denominatore composto da fattori primi diversi da 2 e da 5 si trasforma sempre in un numero decimale **periodico semplice**;
- una frazione che ha il denominatore composto da altri fattori primi oltre il 2 e il 5 si trasforma sempre in un numero decimale **periodico misto**;
- il **valore approssimato per difetto o troncamento** di un numero decimale si ottiene prendendo la cifra corrispondente all'approssimazione considerata e fermando ad essa il numero;
- il **valore approssimato per eccesso** di un numero decimale si ottiene prendendo la cifra corrispondente all'approssimazione considerata, aumentandola di una unità, e fermando ad essa il numero.

### COMPrensione della teoria

- 1 Completa la seguente definizione:  
la frazione generatrice è la frazione che dà origine ai .....
- 2 Completa le seguenti frasi. Dividendo numeratore e denominatore di una frazione si ottiene un numero:
  - a. ...., se la frazione è apparente;
  - b. decimale, se la frazione .....
- 3 Dividendo numeratore e denominatore di una frazione si possono ottenere:
  - a. solo numeri decimali limitati;

- b. solo numeri decimali illimitati;
- c. sia numeri decimali limitati che illimitati.

**4** Completa la seguente affermazione:  
una frazione si dice decimale quando il ..... è una .....

- 5** Una frazione si trasforma in un numero decimale limitato se:
- a. il denominatore è composto esclusivamente dai fattori 2 e 5;
  - b. il denominatore non contiene i fattori 2 e 5;
  - c. il denominatore è composto anche da altri fattori oltre il 2 e il 5.

- 6** Completa le seguenti frasi:
- a. in un numero decimale periodico il periodo è .....  
l'antiperiodo è .....
  - b. un numero è periodico semplice se .....
  - c. un numero è periodico misto se .....

- 7** Approssimare un numero per troncamento o per difetto vuol dire:
- a. scrivere la cifra corrispondente all'approssimazione voluta, aumentata di una unità, e fermare ad essa il numero;
  - b. scrivere la cifra corrispondente all'approssimazione voluta e fermare ad essa il numero;
  - c. scrivere la cifra precedente a quella dell'approssimazione voluta e fermare ad essa il numero.

## APPLICAZIONE

*Trasforma le seguenti frazioni nei corrispondenti numeri razionali assoluti e distingui poi il tipo di numero che hai ottenuto.*

### **8** *Esercizio Svolto*

a.  $\frac{32}{4}$ ;    b.  $\frac{32}{50}$ ;    c.  $\frac{43}{200}$ ;    d.  $\frac{13}{9}$ ;    e.  $\frac{13}{12}$ ;    f.  $\frac{12}{11}$ ;    g.  $\frac{7}{15}$ .

Eseguiamo la divisione tra il numeratore e il denominatore delle varie frazioni:

- a.  $32 : 4 = 8$                       numero intero;
- b.  $32 : 50 = 0,64$                 numero decimale finito;
- c.  $43 : 200 = 0,215$               numero decimale finito;
- d.  $13 : 9 = 1,4$                     numero decimale periodico semplice;
- e.  $13 : 12 = 1,08\bar{3}$                 numero decimale periodico misto;
- f.  $12 : 11 = 1,0\bar{9}$                  numero decimale periodico semplice;
- g.  $7 : 15 = 0,4\bar{6}$                   numero decimale periodico misto.

**9** a.  $\frac{12}{4}$ ;    b.  $\frac{17}{20}$ ;    c.  $\frac{5}{6}$ ;    d.  $\frac{13}{15}$ .

**10** a.  $\frac{31}{10}$ ;    b.  $\frac{17}{9}$ ;    c.  $\frac{21}{50}$ ;    d.  $\frac{11}{6}$ .

**11** a.  $\frac{23}{100}$ ;    b.  $\frac{7}{6}$ ;    c.  $\frac{37}{12}$ ;    d.  $\frac{11}{21}$ .

**12** a.  $\frac{64}{33}$ ;    b.  $\frac{17}{15}$ ;    c.  $\frac{31}{14}$ ;    d.  $\frac{74}{15}$ .

**13** a.  $\frac{36}{45}$ ;    b.  $\frac{56}{18}$ ;    c.  $\frac{21}{25}$ ;    d.  $\frac{55}{21}$ .

*Individua tra le seguenti frazioni quali sono decimali e quali ordinarie.*

### 14 *Esercizio Svolto*

a.  $\frac{25}{34}$ ;    b.  $\frac{17}{100}$ ;    c.  $\frac{13}{27}$ ;    d.  $\frac{7}{1000}$ ;    e.  $\frac{423}{10}$ .

a.  $\frac{25}{34}$  → frazione ordinaria (il denominatore è un numero diverso da una potenza di 10);

b.  $\frac{17}{100}$  → frazione decimale (il denominatore è una potenza di 10);

c.  $\frac{13}{27}$  → frazione ordinaria (il denominatore è un numero diverso da una potenza di 10);

d.  $\frac{7}{1000}$  → frazione decimale (il denominatore è una potenza di 10);

e.  $\frac{423}{10}$  → frazione decimale (il denominatore è una potenza di 10).

15 a.  $\frac{23}{100}$ ;    b.  $\frac{12}{37}$ ;    c.  $\frac{1}{10}$ ;    d.  $\frac{29}{1000}$ ;    e.  $\frac{4}{73}$ .

*Trasforma le seguenti frazioni decimali nei corrispondenti numeri decimali senza eseguire la divisione tra il numeratore e il denominatore.*

### 16 *Esercizio Svolto*

a.  $\frac{23}{10}$ ;    b.  $\frac{243}{100}$ ;    c.  $\frac{32}{1000}$ .

Il numero decimale si ottiene scrivendo il numeratore e contando tante cifre decimali quanti sono gli zeri del denominatore:

a.  $\frac{23}{10} = 2,3$

b.  $\frac{243}{100} = 2,43$

c.  $\frac{32}{1000} = 0,032$

↓                    ↑  
uno zero → una cifra decimale

↓                    ↑  
due zeri → due cifre decimali

↓                    ↑  
tre zeri → tre cifre decimali

17 a.  $\frac{54}{10}$ ;    b.  $\frac{12}{100}$ ;    c.  $\frac{723}{1000}$ .

18 a.  $\frac{1}{10}$ ;    b.  $\frac{61}{100}$ ;    c.  $\frac{67}{1000}$ .

19 a.  $\frac{13}{100}$ ;    b.  $\frac{23}{1000}$ ;    c.  $\frac{1}{100}$ .

*Stabilisci il tipo di numero decimale che si origina dalle seguenti frazioni ordinarie senza eseguire la divisione tra numeratore e denominatore.*

### 20 *Esercizio Guidato*

a.  $\frac{133}{420}$ ;    b.  $\frac{327}{400}$ ;    c.  $\frac{196}{539}$ .

a. Riduciamo ai minimi termini la frazione  $\frac{133}{420} = \frac{19}{60}$ . Scomponiamo il ..... in fattori .....

$60 = \dots \cdot 3 \cdot \dots$  il denominatore scomposto in ..... contiene i fattori ..... pertanto la frazione dà origine ad un numero decimale ..... (infatti  $19 : 60 = \dots$ );

- b. La frazione  $\frac{327}{400}$  è già ridotta ai minimi termini. Scomponiamo il denominatore in fattori primi.  
 $400 = \dots \cdot \dots$  il denominatore scomposto in ..... contiene i fattori ..... pertanto la frazione dà origine ad un numero decimale ..... (infatti  $327 : 400 = \dots$ );
- c. Riduciamo ai minimi termini la frazione  $\frac{196}{539} = \frac{4}{11}$ .  
 Il denominatore scomposto in ..... contiene il fattore ..... pertanto la frazione dà origine ad un numero ..... (infatti  $4 : 11 = \dots$ ).

**21** a.  $\frac{35}{200}$ ;    b.  $\frac{28}{132}$ ;    c.  $\frac{19}{15}$ .

**22** a.  $\frac{106}{33}$ ;    b.  $\frac{28}{80}$ ;    c.  $\frac{46}{12}$ .

**23** a.  $\frac{327}{200}$ ;    b.  $\frac{121}{30}$ ;    c.  $\frac{377}{231}$ .

Calcola il quoziente delle seguenti frazioni ed approssima il numero alla cifra indicata.

**24** *Esercizio Guidato*

- a.  $\frac{11}{13}$  ai centesimi per eccesso;    b.  $\frac{4}{15}$  ai decimi per eccesso;    c.  $\frac{13}{36}$  ai millesimi per difetto.
- a.  $11 : 13 = 0,846153\dots$  L'approssimazione ai centesimi per eccesso è .....;
- b.  $4 : 15 = \dots$  L'approssimazione ai decimi per eccesso è .....;
- c.  $13 : \dots = \dots$  L'approssimazione ai millesimi per difetto è .....

**25** a.  $\frac{21}{32}$  ai decimi per eccesso;    b.  $\frac{23}{8}$  ai centesimi per eccesso;    c.  $\frac{25}{34}$  ai millesimi per difetto.

- **26** Date le seguenti frazioni indica il tipo di numero decimale che si origina ed approssima tale numero come richiesto a fianco:

- a.  $\frac{5}{13}$  per difetto ai millesimi;    b.  $\frac{321}{250}$  per eccesso ai centesimi;
- c.  $\frac{1052}{495}$  per difetto ai millesimi;    d.  $\frac{325}{100}$  per difetto ai decimi.

## LA FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE

### richiami della teoria

- La frazione **generatrice** di un numero **decimale limitato** è una frazione che ha per numeratore il numero stesso senza virgola e per denominatore una potenza di 10 di esponente uguale al numero delle cifre decimali del numero considerato;
- la frazione **generatrice** di un numero **decimale periodico semplice** è una frazione avente per numeratore il numero ottenuto dalla differenza tra tutto il numero, compreso il periodo e senza virgola, e la sua parte intera e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo;
- la frazione **generatrice** di un numero **decimale periodico misto** è una frazione avente per numeratore il numero ottenuto dalla differenza tra tutto il numero, compreso il periodo e l'antiperiodo e senza la virgola, e il numero formato dalle cifre che precedono il periodo, compreso l'antiperiodo e senza virgola, e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

### APPLICAZIONE

Trasforma i seguenti numeri decimali nelle corrispondenti frazioni generatrici.

#### 27 *Esercizio Svolto*

a. 4,13;    b.  $2,3\overline{7}$ ;    c.  $1,\overline{23}$ .

a. 4,13 → Si tratta di un numero decimale finito; basta mettere al numeratore il numero stesso senza la virgola e al denominatore una potenza di 10 di esponente pari al numero di cifre decimali. Pertanto:  $4,13 = \frac{413}{10^2} = \frac{413}{100}$ .

b.  $2,3\overline{7}$  → Si tratta di un numero decimale periodico misto; basta mettere al numeratore la differenza fra il numero compreso il periodo e senza la virgola, con il numero che si ottiene troncando la parte periodica e al denominatore si pone un 9 per ogni cifra del periodo ed uno 0 per ogni cifra dell'antiperiodo.

$$\text{Pertanto: } 2,3\overline{7} = \frac{237 - 23}{90} = \frac{214}{90} = \frac{107}{45}.$$

c.  $1,\overline{23}$  → Si tratta di un numero decimale periodico semplice; basta mettere al numeratore la differenza fra tutto il numero compreso il periodo e senza la virgola, con il numero che si ottiene troncando la parte periodica, e al denominatore si mettono tanti 9 quante sono le cifre del periodo. Pertanto:  $1,\overline{23} = \frac{123 - 1}{99} = \frac{122}{99}$ .

28 a. 6,25;    b. 0,25;    c. 2,9;    d. 3,21.

$$\left[ \text{a. } \frac{25}{4}; \text{ b. } \frac{1}{4}; \text{ c. } \frac{29}{10}; \text{ d. } \frac{321}{100} \right]$$

29 a.  $5,\overline{3}$ ;    b.  $0,\overline{86}$ ;    c.  $0,\overline{72}$ ;    d.  $3,\overline{43}$ .

$$\left[ \text{a. } \frac{16}{3}; \text{ b. } \frac{86}{99}; \text{ c. } \frac{8}{11}; \text{ d. } \frac{340}{99} \right]$$

30 a.  $2,1\overline{6}$ ;    b.  $0,3\overline{6}$ ;    c.  $0,41\overline{6}$ ;    d.  $1,0\overline{35}$ .

$$\left[ \text{a. } \frac{13}{6}; \text{ b. } \frac{11}{30}; \text{ c. } \frac{5}{12}; \text{ d. } \frac{205}{198} \right]$$

**31** a.  $3,2\overline{7}$ ;    b.  $31,2$ ;    c.  $4,\overline{32}$ ;    d.  $3,24$ .

$\left[ \text{a. } \frac{59}{18}; \text{b. } \frac{156}{5}; \text{c. } \frac{428}{99}; \text{d. } \frac{81}{25} \right]$

● **32** a.  $2,2\overline{34}$ ;    b.  $3,\overline{3}$ ;    c.  $23,\overline{1213}$ ;    d.  $145,\overline{129}$ .

$\left[ \text{a. } \frac{1106}{495}; \text{b. } \frac{10}{3}; \text{c. } \frac{38497}{1665}; \text{d. } \frac{71839}{495} \right]$

● **33** Alcune delle seguenti uguaglianze sono false, individuale e correggile:

a.  $5,6 = \frac{28}{5}$ ;    b.  $3,\overline{2} = \frac{16}{5}$ ;    c.  $4,\overline{2} = \frac{38}{9}$ ;    d.  $1,\overline{36} = \frac{11}{15}$ .

● **34** Disponi i seguenti numeri decimali in ordine crescente dopo averli trasformati nelle corrispondenti frazioni generatrici.

a.  $2,7$ ;    b.  $2,7\overline{017}$ ;    c.  $2,71$ ;    d.  $2,7\overline{01}$ ;    e.  $2,\overline{717}$ ;    f.  $2,7\overline{17}$ ;    g.  $2,7\overline{1}$ .

## LE OPERAZIONI E LE ESPRESSIONI CON I NUMERI DECIMALI

### richiami della teoria

- Se le espressioni da calcolare contengono esclusivamente numeri decimali limitati si possono eseguire i calcoli in due modi diversi:
  - mediante le regole del calcolo con i numeri decimali evitando la trasformazione nelle corrispondenti frazioni generatrici;
  - trasformando prima i numeri decimali limitati nelle corrispondenti frazioni generatrici e poi applicando le regole relative al calcolo con le frazioni;
- per la risoluzione di un'espressione con numeri decimali limitati e periodici si devono trasformare i numeri in frazioni; valgono poi le stesse regole utilizzate nel calcolo con le frazioni.

### APPLICAZIONE

Calcola il valore della seguente espressione con numeri decimali limitati utilizzando i due procedimenti di calcolo.

#### 35 *Esercizio Svolto*

$$(1,2 + 3,5) - 1,3 + [0,1 \cdot (2,3 - 1,2) + 2,5] - 0,01.$$

##### I metodo.

Svolgiamo direttamente il calcolo con numeri decimali.

$$\begin{aligned} (1,2 + 3,5) - 1,3 + [0,1 \cdot (2,3 - 1,2) + 2,5] - 0,01 &= 4,7 - 1,3 + [0,1 \cdot 1,1 + 2,5] - 0,01 = \\ &= 4,7 - 1,3 + [0,11 + 2,5] - 0,01 = 4,7 - 1,3 + 2,61 - 0,01 = 6 \end{aligned}$$

##### II metodo.

In alternativa possiamo trasformare tutti i numeri decimali finiti nelle corrispondenti frazioni generatrici e applicare le regole del calcolo frazionario.

$$\begin{aligned} (1,2 + 3,5) - 1,3 + [0,1 \cdot (2,3 - 1,2) + 2,5] - 0,01 &= \\ &= \left(\frac{12}{10} + \frac{35}{10}\right) - \frac{13}{10} + \left[\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{23}{10} - \frac{12}{10}\right) + \frac{25}{10}\right] - \frac{1}{100} = \\ &= \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{2}\right) - \frac{13}{10} + \left[\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{23}{10} - \frac{6}{5}\right) + \frac{5}{2}\right] - \frac{1}{100} = \\ &= \left(\frac{12+35}{10}\right) - \frac{13}{10} + \left[\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{23-12}{10}\right) + \frac{5}{2}\right] - \frac{1}{100} = \\ &= \frac{47}{10} - \frac{13}{10} + \left[\frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} + \frac{5}{2}\right] - \frac{1}{100} = \frac{17}{5} + \left[\frac{11}{100} + \frac{5}{2}\right] - \frac{1}{100} = \\ &= \frac{17}{5} + \left(\frac{11+250}{100}\right) - \frac{1}{100} = \frac{17}{5} + \frac{261}{100} - \frac{1}{100} = \frac{340+261-1}{100} = \frac{600}{100} = 6 \end{aligned}$$

36  $(3,5 - 0,2) \cdot (1,1 + 2,3).$

[11,22]

37  $0,2 + [(0,3 - 0,2) \cdot 3,1 + 0,09] - 0,1 + 3,2 : 0,1.$

[32,5]

$$38 \quad 5,3 - 3,3 + [(2,1 + 3,2) \cdot 0,1 - (0,1 + 0,2)] + 1,5.$$

[3,73]

*Calcola il valore delle seguenti espressioni utilizzando il metodo che prevede la trasformazione di tutti i numeri decimali nelle corrispondenti frazioni generatrici.*

$$39 \quad 0,\overline{1} + 3,\overline{5} - 2,\overline{3}.$$

 $\left[\frac{4}{3}\right]$ 

$$40 \quad (0,375 + 1,\overline{6} - 0,041\overline{6}) : 0,5.$$

[4]

$$41 \quad 1,\overline{3} + (2,\overline{4} + 1,\overline{3} - 0,\overline{3}) - 0,\overline{1}.$$

 $\left[\frac{14}{3}\right]$ 

$$42 \quad (0,15 + 0,4 + 1,75) : (2,75 - 0,8\overline{3}).$$

 $\left[\frac{6}{5}\right]$ 

$$43 \quad (2,\overline{3} : 1,4 - 0,\overline{7}) \cdot (0,6\overline{3} \cdot 3 - 0,1\overline{6}) : 0,8\overline{6}.$$

 $\left[\frac{16}{9}\right]$ 

$$44 \quad (15,3 : 5,1)^2 + 1,3 - [(1,2 + 0,8)^2 - 3,2] : 0,2.$$

 $\left[\frac{63}{10}\right]$ 

$$45 \quad [(3,\overline{2} - 1,5 - 0,\overline{1}) - 0,5] - (0,1 + 0,3) + 0,1\overline{3}.$$

 $\left[\frac{38}{45}\right]$ 

$$46 \quad [(1,\overline{3} + 1,1\overline{6})^2 : (0,\overline{3} + 0,75 + 1)]^2 : (0,5 + 0,\overline{6} - 0,125).$$

 $\left[\frac{216}{25}\right]$ 

$$47 \quad \{[(0,5)^2 \cdot 0,\overline{6} \cdot 0,25 \cdot 3] : (0,5)^2\} : [(0,\overline{6} + 0,5) : (2 - 0,6)].$$

 $\left[\frac{3}{5}\right]$ 

$$48 \quad 0,36\overline{1} : \{1,\overline{3} - [1 - 0,1\overline{6} + 0,5 : (5,5 - 0,5) - 0,25] : 2,7\overline{3}\}.$$

 $\left[\frac{1}{3}\right]$ 

$$49 \quad 1,\overline{3} + [1,5 - 1,2 \cdot (0,\overline{3} + 0,3)] : 0,2 + 1,2\overline{1} : 0,\overline{60} + 0,4 - 0,3\overline{2}.$$

 $\left[\frac{64}{9}\right]$ 

$$50 \quad [(1,\overline{6} + 0,25 - 0,\overline{6}) - (0,1\overline{6} + 1,\overline{3} - 1,1\overline{6}) + 1,1\overline{6} - (3 - 0,91\overline{6})]^3.$$

[0]

$$51 \quad \{[(0,64 + 1,6 : 0,8) - 2,5 + 12,4 : 3,1 \cdot 0,1 - 0,42] - 0,25 \cdot 0,2\} : 0,07.$$

[1]

$$\bullet 52 \quad \frac{1,\overline{7} \cdot 0,75}{[(2,25 : 1,5)^3 : (0,\overline{6} : 0,\overline{4})^3]^5}.$$

 $\left[\frac{4}{3}\right]$ 

$$\bullet 53 \quad \frac{[(0,2 + 1,3) : 2,1] \cdot 1,4 - 0,\overline{3} + 1,\overline{3}}{[(1,5 + 0,3) - 0,\overline{3} + 1,\overline{6}] : 9,4}.$$

[6]