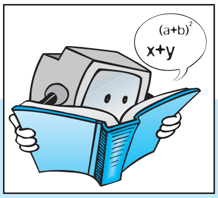
2

I RADICALI



Per ricordare

★ La misura di un segmento non è sempre esprimibile mediante un numero razionale; per esempio, se un quadrato ha lato unitario, la misura della sua diagonale, che è $\sqrt{2}$, non è razionale.
Per misurare occorre allora ampliare l'insieme Q introducendo i **numeri irrazionali** (cioè non razionali); essi, non potendosi esprimere sotto forma di frazione o di numero decimale finito o periodico, sono rappresentati da numeri decimali illimitati non periodici.
L'insieme dei numeri razionali e di quelli irrazionali costituisce l'insieme dei **numeri reali** che si indica con R.

★ Dato un numero reale b ed un numero intero positivo n, conosciamo il significato della scrittura $a = b^n$: il numero a è il prodotto di n fattori uguali a b. Viceversa, ci si può domandare se, noto il valore di a, esiste sempre il numero b che, elevato alla n-esima potenza, dà a ed inoltre quanti sono gli eventuali numeri b che soddisfano questa uguaglianza.
Osserviamo allora che:

- ci sono due numeri che, elevati alla quarta, danno 16: $(-2)^4 = 16 \quad (+2)^4 = 16$
- c'è un solo numero che, elevato alla terza, dà 27: $(+3)^3 = 27$
- c'è un solo numero che, elevato alla terza, dà -8: $(-2)^3 = -8$
- non ci sono numeri che, elevati al quadrato, danno -25.

Di numeri b ce ne possono quindi essere zero, uno, due a seconda dei casi, ma se conveniamo di operare nell'ambito dei numeri positivi, cioè supponiamo che sia $a \geq 0$ e $b \geq 0$, allora il numero b esiste sempre ed è unico. Esso è la radice n-esima del numero a :

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Il numero $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, prende il nome di **radicale aritmetico** o **radicale assoluto**; n è l'indice del radicale, il numero a è l'argomento del radicale o radicando.

★ Per i radicali aritmetici vale la **proprietà invariantiva**: il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Questa proprietà consente di:

- semplificare un radicale quando l'indice della radice e l'esponente del radicando hanno un fattore comune:

  $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$ abbiamo diviso per 2 sia l'indice del radicale che l'esponente del radicando

- ridurre due o più radicali allo stesso indice moltiplicando opportunamente sia l'indice del radicale che l'esponente del radicando:

  $\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[4]{5} \quad \sqrt{3}$ si possono ricondurre al comune indice 12: $\sqrt[12]{2^4} \quad \sqrt[12]{5^3} \quad \sqrt[12]{3^6}$

★ Fra due radicali aritmetici si possono sempre eseguire le operazioni di moltiplicazione e di divisione se i due radicali hanno lo stesso indice:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ se $a \geq 0,\ b \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ se $a \geq 0,\ b > 0$

Quando i due radicali non hanno lo stesso indice, prima li si riconduce all'indice comune e poi si esegue la moltiplicazione o la divisione; per esempio:

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{6} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{2^7 \cdot 3^3}$$

L'operazione di moltiplicazione, così come è stata definita, consente poi di:

- portar dentro il simbolo di radice un fattore esterno elevandolo ad una potenza uguale all'indice della radice: $\mathbf{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot \mathbf{5^3}}$
- portar fuori dal simbolo di radice un fattore il cui esponente è maggiore o uguale all'indice della radice: $\sqrt[4]{2^6 \cdot 3^5 \cdot 7^2} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}$

Ricordiamo poi le seguenti regole:

- $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

★ L'addizione e la sottrazione fra radicali si può eseguire solo se i radicali sono simili, cioè se differiscono uno dall'altro solo per un fattore esterno:

$3\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2}$ sono simili $\qquad 4\sqrt[3]{2} \quad 5\sqrt{2}$ non sono simili

L'addizione e la sottrazione si eseguono tenendo presenti le solite regole usate anche per i monomi simili:

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \qquad 7\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{3}$

★ Se uno o più radicali compaiono al denominatore di una frazione, si può eseguire l'operazione di **razionalizzazione** che consiste nel rendere razionale il denominatore; per fare questo si applica la proprietà invariantiva della divisione moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per opportuni fattori. Le regole principali sono le seguenti:

- $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$ esempio: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}$

  esempio: $\dfrac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dfrac{3\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{5 - 2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}$

  esempio: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} = \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{2+3} = \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{5}$

★ Utile da ricordare è anche la seguente formula dei **radicali doppi**:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Se l'espressione $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, allora la formula precedente consente di trasformare un radicale doppio nella somma di due radicali semplici. Per esempio

$\sqrt{12 - \sqrt{23}}$ essendo $a^2 - b = 144 - 23 = 121 = 11^2$, applicando la formula si ottiene

$$\sqrt{12 - \sqrt{23}} = \sqrt{\frac{12 + 11}{2}} - \sqrt{\frac{12 - 11}{2}} = \sqrt{\frac{23}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

★ Tramite i radicali possiamo dare un significato anche alla potenza ad esponente razionale di un numero reale positivo; vale infatti la relazione

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Per esempio: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$ $\qquad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

★ Se facciamo cadere l'ipotesi che a e b siano numeri positivi, l'esistenza e l'unicità della radice n-esima di a non sono più garantite; per esempio, la radice quadrata del numero 4 ha due valori: -2 e $+2$, la radice quadrata del numero -9 non esiste, la radice cubica del numero -8 è -2.
Per distinguere questa situazione dalla precedente si parla di **radicale algebrico:** dato un numero a reale (non necessariamente positivo), chiamiamo radice n-esima algebrica di a, e la indichiamo con $\sqrt[n]{a}$, ogni numero b tale che $b^n = a$.

In pratica:

- se n è pari e $a > 0$ $\rightarrow$ esistono due numeri b opposti

  esempio: $\sqrt{25} = \begin{cases} -5 \\ +5 \end{cases}$

- se n è pari e $a < 0$ $\rightarrow$ il numero b non esiste

  esempio: $\sqrt{-4} =$ non esiste

- se n è dispari $\rightarrow$ esiste un solo numero b che è positivo se $a > 0$, negativo se $a < 0$

  esempi: $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\qquad \sqrt[3]{8} = 2$

In un'espressione che contiene radicali algebrici non si può più garantire l'unicità del risultato; d'altra parte il radicale aritmetico non consente di operare con le radici di numeri negativi. Nelle espressioni che contengono radicali si conviene allora di considerare algebrici quelli di indice dispari e aritmetici quelli di indice pari.

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali assoluti, supponendo che i fattori letterali che in essi compaiono siano tutti positivi.

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt[4]{144}$

Scomponiamo in fattori il radicando: $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2}$

Semplifichiamo dividendo indice del radicale ed esponenti del radicando per 2: $\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

2 $\sqrt[6]{1728}$ $\quad \sqrt[4]{3136}$ $\quad \left[\sqrt{12};\ \sqrt{56}\right]$

3 $\sqrt[4]{\dfrac{16}{25}}$ $\quad \sqrt[6]{\dfrac{81}{625}}$ $\quad \left[\sqrt{\dfrac{4}{5}};\ \sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\right]$

4 $\sqrt[6]{\dfrac{216}{343}}$ $\quad \sqrt[4]{\dfrac{81}{25}}$ $\quad \left[\sqrt{\dfrac{6}{7}};\ \sqrt{\dfrac{9}{5}}\right]$

5 $\sqrt[3]{\dfrac{x^6y^{18}}{8y^3}}$ $\quad \sqrt[5]{\dfrac{32(a+b)^{10}}{a^{15}b^5}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}x^2y^5;\ \dfrac{2(a+b)^2}{a^3b}\right]$

6 $\sqrt[3]{\dfrac{(x+y)^6}{8x^3y^6}}$ $\quad \sqrt[5]{x^{10}y^5}$ $\quad \left[\dfrac{(x+y)^2}{2xy^2};\ x^2y\right]$

7 $\sqrt[3]{\dfrac{8xy^3}{125x^4}}$ $\quad \sqrt[4]{5b^2c^6}$ $\quad \left[\dfrac{2y}{5x};\ \text{irriducibile}\right]$

8 $\sqrt[5]{\dfrac{x^{10}y^7}{32y^2}}$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{3a^9b^3}{81b^{12}}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}x^2y;\ \dfrac{a^3}{3b^3}\right]$

9 $\sqrt[3]{\dfrac{125b^6}{27a^3}}$ $\quad \sqrt[6]{\dfrac{x^6y^{12}z^9}{27}}$ $\quad \left[\dfrac{5b^2}{3a};\ \sqrt{\dfrac{1}{3}x^2y^4z^3}\right]$

10 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\sqrt[4]{\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2y^6}}$$

Scomponiamo dapprima il polinomio al numeratore del radicando: $\sqrt[4]{\dfrac{(x+2y)^2}{x^2y^6}}$

Semplifichiamo: $\sqrt{\dfrac{x+2y}{xy^3}}$

11 $\sqrt[6]{4a^2-12ab+9b^2}$ $\quad \sqrt[4]{x^4-4x^3y+4x^2y^2}$ $\quad \left[\sqrt[3]{2a-3b};\ \sqrt{x(x-2y)}\right]$

12 $\sqrt{\dfrac{4x^3+4x^4+x^5}{x(y-1)^2}}$ $\quad \sqrt[4]{\dfrac{16(x+1)^6}{x^2y^4+2xy^4+y^4}}$ $\quad \left[\dfrac{x(x+2)}{y-1};\ \dfrac{2(x+1)}{y}\right]$

13 $\sqrt[6]{\dfrac{(3x+1)y^3+3x^2y^3}{x^3}+y^3}$ $\qquad \sqrt[8]{4-\dfrac{4}{ab}+\dfrac{1}{a^2b^2}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{(x+1)y}{x}};\ \sqrt[4]{\dfrac{2ab-1}{ab}}\right]$

14 $\sqrt[3]{(8x^2-8)(x^4-2x^2+1)}$ $\qquad \sqrt[5]{\dfrac{(x^2-4)(4x+x^2+4)^2}{x-2}}$ $[2(x^2-1);\ x+2]$

15 $\sqrt[8]{\dfrac{(x^2-1)^4}{x^2+2x+1}}$ $\qquad \sqrt[6]{\dfrac{a^3-6a^2+12a-8}{8a^6-24a^5+24a^4-8a^3}}$ $\left[\sqrt[4]{(x-1)^2(x+1)};\ \sqrt{\dfrac{a-2}{2a(a-1)}}\right]$

16 $\sqrt[4]{\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{4a^2}+1}$ $\qquad \sqrt[6]{x+\dfrac{1-x^3}{1-x}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{2a+3}{2a}};\ \sqrt[3]{x+1}\right]$

Riduci allo stesso indice i seguenti radicali.

17 $\sqrt{3}$ $\qquad \sqrt[3]{2}$ $\qquad \sqrt[4]{5}$ $[\sqrt[12]{729};\ \sqrt[12]{16};\ \sqrt[12]{125}]$

18 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ $\qquad \sqrt[3]{7}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{1}{4}};\ \sqrt[6]{\dfrac{27}{125}};\ \sqrt[6]{49}\right]$

19 $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}a}$ $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}a}$ $\qquad \sqrt[6]{\dfrac{1}{2}a^2}$ $\left[\sqrt[12]{\dfrac{1}{8}a^3};\ \sqrt[12]{\dfrac{81}{16}a^4};\ \sqrt[12]{\dfrac{1}{4}a^4}\right]$

20 $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y}}$ $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{2y}{x^2}}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{3xy}{4}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{4y^2}};\ \sqrt[6]{\dfrac{4y^2}{x^4}};\ \sqrt[6]{\dfrac{27x^3y^3}{64}}\right]$

21 $\sqrt{a+b}$ $\qquad \sqrt[3]{a+b}$ $\qquad \sqrt[4]{(a+b)^3}$ $\left[\sqrt[12]{(a+b)^6};\ \sqrt[12]{(a+b)^4};\ \sqrt[12]{(a+b)^9}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni supponendo positivi tutti i fattori letterali dei radicali.

22 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}}:\sqrt{3};$ $\qquad \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{1}{2}};\ \sqrt[6]{\dfrac{9}{2}}\right]$

23 $\sqrt{\dfrac{12}{5}}:\sqrt[3]{\dfrac{9}{10}}:(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{24})\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{10}}$ $\left[\sqrt[4]{\dfrac{2}{25}}\right]$

24 $\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}:\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{3}}:\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt{3}$ $[\sqrt[3]{2}]$

25 $\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^5}}:\sqrt{\dfrac{6x+6}{9x^2}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right]$

26 $\sqrt{\dfrac{2x}{3x-1}}:\sqrt{\dfrac{x^2y}{6x-2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{16}{xy}}\right]$

27 $\sqrt[4]{\dfrac{a^2+b^2-2ab}{b^4}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{ab^2-b^3}}\cdot\sqrt[4]{8b^3}$ $\left[\sqrt[4]{\dfrac{8}{b^3}}\right]$

28 $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^3+3a-3a^2-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{a-1}{a^2}}:\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$ $[\sqrt[6]{a}]$

29 $\sqrt{\dfrac{4a-4}{a^2}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a-1}{a}}:\sqrt{2a-4+\dfrac{2}{a}}$ $\left[\sqrt[4]{\dfrac{4}{a^3(a-1)}}\right]$

30 $\sqrt{\dfrac{x^2+6x+9}{16x^4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{8x^5}{(x+3)^2\left(\dfrac{9}{2}x+\dfrac{1}{2}x^3+3x^2\right)}}$ $\left[\dfrac{1}{2x}\right]$

31 $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(2a^2+2b^2+4ab)}{2b^4}}:\sqrt[6]{b^4(a^2+2ab+b^2)^3}$ $\left[\dfrac{1}{b^2}\right]$

32 $\sqrt[6]{\dfrac{(x+3)^3(5x+15)}{16x^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{\sqrt{5}(x+3)^2}}:\sqrt[6]{x+6+\dfrac{9}{x}}$ $\left[\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+3}}\right]$

33 $(x-a)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{81x^4}{(a^2+x^2-2ax)^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(a-x)^2}{9x^5-18ax^4+9a^2x^3}}$ $[\sqrt[3]{3}]$

Trasporta dentro il simbolo di radice tutti i possibili fattori esterni supponendo positivi quelli letterali ed opera le opportune semplificazioni.

34 **ESERCIZIO SVOLTO**

$3a\sqrt[4]{\dfrac{b}{3a^2}}$

Per portare sotto il simbolo di radice il fattore esterno $3a$ dobbiamo elevarlo alla potenza indicata dall'indice della radice:

$$\sqrt[4]{(3a)^4\cdot\frac{b}{3a^2}}=\sqrt[4]{81a^4\cdot\frac{b}{3a^2}}=\sqrt[4]{27a^2b}$$

35 $2\sqrt[3]{3}$ $\qquad \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{6}}$ $\qquad 3\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $\left[\sqrt[3]{24};\ \sqrt{\dfrac{3}{8}};\ \sqrt{3}\right]$

36 $\dfrac{1}{3}\sqrt{12}$ $\qquad \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\qquad \dfrac{1}{6}\sqrt[3]{9}$ $\left[\sqrt{\dfrac{4}{3}};\ \sqrt{\dfrac{3}{8}};\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{24}}\right]$

37 $\dfrac{1}{2a}\sqrt[5]{96a}$ $\qquad \dfrac{3}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b^4}{27}}$ $\left[\sqrt[5]{\dfrac{3}{a^4}};\ \sqrt[3]{b}\right]$

38 $\dfrac{1}{2ab}\sqrt[3]{128a^7b^4}$ $\qquad \dfrac{y}{3x}\sqrt[5]{\dfrac{27x^4}{y^8}}$ $\left[2a\sqrt[3]{2ab};\ \sqrt[5]{\dfrac{1}{9xy^3}}\right]$

39 $\dfrac{15}{xy}\sqrt{\dfrac{x^3}{25}}$ $\qquad \dfrac{ab^2}{12}\sqrt[3]{\dfrac{36}{ab}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{9x}{y^2}};\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{48}a^2b^5}\right]$

40 $\dfrac{y}{6x}\sqrt{\dfrac{16x}{y}}$ $\qquad \dfrac{a}{10}\sqrt[3]{\dfrac{50}{a^4}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{4y}{9x}};\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{20a}}\right]$

41 $\dfrac{3x}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy}{3}}$ $\qquad \dfrac{ab}{2}\sqrt[5]{32\dfrac{a}{b}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{3x^3}{y^3}};\ \sqrt[5]{a^6b^4}\right]$

42 $\dfrac{1}{x^2+2x}\sqrt{\dfrac{3x+6}{x}}$ $\qquad \dfrac{1}{x+y}\sqrt[3]{x^4+x^3y}$ $\left[\sqrt{\dfrac{3}{x^3(x+2)}};\ \sqrt[3]{\dfrac{x^3}{(x+y)^2}}\right]$

Trasporta fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori supponendo positivi quelli letterali.

43 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt[3]{162a^4x^5}$

Scomponiamo innanzi tutto il fattore numerico: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^4a^4x^5}$

I fattori che si possono portare al di fuori del simbolo di radice sono quelli che hanno un esponente maggiore o uguale all'indice della radice. Per tali fattori si divide l'esponente per l'indice della radice; il quoziente è l'esponente del fattore esterno, il resto è l'esponente del fattore interno:

per l'esponente 4 $\rightarrow$ $4 : 3 = 1$ con resto 1 per l'esponente 5 $\rightarrow$ $5 : 3 = 1$ con resto 2

$$\sqrt[3]{2 \cdot 3^4a^4x^5} = 3ax\sqrt[3]{2 \cdot 3ax^2} = 3ax\sqrt[3]{6ax^2}$$

44 $\sqrt[3]{162}$ $\sqrt{\dfrac{25}{24}}$ $\sqrt[3]{16}$ $\left[3\sqrt[3]{6}; \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{1}{6}}; 2\sqrt[3]{2}\right]$

45 $\sqrt{40}$ $\sqrt{180}$ $\sqrt[3]{54}$ $[2\sqrt{10}; 6\sqrt{5}; 3\sqrt[3]{2}]$

46 $\sqrt{2+\dfrac{2}{9}}$ $\sqrt{7-\dfrac{3}{4}}$ $\sqrt{\dfrac{1}{8}+6}$ $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{5}; \dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right]$

47 $\sqrt{ab^4c^5}$ $\sqrt[4]{\dfrac{48a^9b^6c}{81}}$ $\left[b^2c^2\sqrt{ac}; \dfrac{2}{3}a^2b\sqrt[4]{3ab^2c}\right]$

48 $\sqrt{45x^2y^7}$ $\sqrt[3]{\dfrac{1}{108}x^5y^4}$ $\left[3xy^3\sqrt{5y}; \dfrac{1}{3}xy\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{4}}\right]$

49 $\sqrt[3]{16a^3b^5}$ $\sqrt[4]{144(a+b)^6}$ $\left[2ab\sqrt[3]{2b^2}; 2(a+b)\sqrt{3(a+b)}\right]$

50 $\sqrt[5]{\dfrac{a^{13}x^8}{32}}$ $\sqrt[3]{54x^9y^{13}}$ $\left[\dfrac{1}{2}a^2x\sqrt[5]{a^3x^3}; 3x^3y^4\sqrt[3]{2y}\right]$

51 $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^8}{32}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{a^6x^2-a^6}{x^3(x+1)}}$ $\left[\dfrac{1}{2}xy^2\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}; \dfrac{a^2}{x}\sqrt[3]{x-1}\right]$

52 $\sqrt[3]{\dfrac{27a^3x^3+27a^3}{8x+8}}$ $\sqrt[4]{\dfrac{x^{10}(y^2+2y+1)^2}{9y^2+9-18y}}$ $\left[\dfrac{3}{2}a\sqrt[3]{x^2-x+1}; x^2(y+1)\sqrt{\dfrac{x}{3(y-1)}}\right]$

53 $\sqrt{\dfrac{36x^2+9y^2-36xy}{8}}$ $\sqrt[3]{3x^3-24-18x^2+36x}$ $\left[\dfrac{3}{2}(2x-y)\sqrt{\dfrac{1}{2}}; (x-2)\sqrt{3}\right]$

54 $\sqrt[3]{3x^3y^3-3x^6}$ $\sqrt{\dfrac{a^2b^4+2a^2b^2+a^2}{16x^3}}$ $\left[x\sqrt[3]{3(y^3-x^3)}; \dfrac{a(b^2+1)}{4x}\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right]$

55 $\sqrt[4]{\dfrac{a^4b}{c^8}+\dfrac{2a^4b}{c^4}+a^4b}$ $\sqrt{\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{8}}$ $\left[\dfrac{a}{c^2}\sqrt[4]{b(c^4+1)^2}; \dfrac{a-b}{2}\sqrt{\dfrac{ab}{2}}\right]$

56 $\sqrt[3]{\dfrac{(a^3x+a^3y)^2}{8b^6}}$ $\sqrt[5]{\dfrac{32y^{10}(27x+27)^2}{(x+1)}}$ $\left[\dfrac{a^2}{2b^2}\sqrt[3]{(x+y)^2}; 6y^2\sqrt[5]{3(x+1)}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti anche potenze di radicali supponendo positivi tutti i fattori letterali.

57 $\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{xy}}\sqrt[6]{\frac{xy^2}{x^5}}\right)^3 : \left(\sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}\right)^2$ $\left[y\sqrt{\frac{y}{x}}\right]$

58 $\left(\sqrt[8]{\frac{x+xy}{x^5}}\right)^2\left(\sqrt[8]{\frac{4x^3}{y+1}}\right)^4$ $\left[2\sqrt[4]{\frac{x^2}{y+1}}\right]$

59 $\sqrt{\frac{3x}{4y}} : \left(\frac{\sqrt{3y}}{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2}{9y^3}}\right)^2$ $\left[\frac{x}{2}\sqrt{3x}\right]$

60 $\left(\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}\right)^3 : \left(\sqrt[4]{\frac{a^3}{(a+1)^5}}\right)^2$ $\left[\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{1}{a-1}}\right]$

61 $\sqrt[6]{\frac{4a^3}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}}\cdot\left(\sqrt[8]{\frac{a-b}{4a^3}} : \sqrt[12]{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^4}}\right)^4$ $\left[\sqrt[3]{\frac{a}{4(a-b)^2}}\right]$

62 $\sqrt[3]{\frac{x-2x^2+x^3}{x^2+1}}\cdot\sqrt[6]{(x-1)(x^2+1)^2} : \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-2x+1}}\right)^2$ $\left[(x-1)^2\sqrt[6]{\frac{x-1}{x^2}}\right]$

63 $\left(\sqrt[9]{\frac{x^2}{64y^4}} : \sqrt[6]{xy}\right)^3\cdot\left(\sqrt[4]{4xy}\right)^6$ $\left[2x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}\right]$

64 $\left(\sqrt{\frac{x-2}{x^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^2-4x+4}}\right)^6 : \sqrt{x^3}$ $\left[\frac{1}{x-2}\sqrt{x}\right]$

65 $\left(\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{3x}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\frac{6x^3}{8x^3+2x^4+8x^2}}\right)^3 : \left(\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}\right)^2$ $\left[\frac{1}{x+2}\sqrt[6]{3x}\right]$

66 $\sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{x}{x-y}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}(4x^3-4x^2y)}}{x}\right)^4}$ $\left[2\sqrt[6]{4x^5(x-y)}\right]$

67 $\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{\frac{4x^2+4x+1}{2x}}\right)^3\cdot\left(\sqrt{\frac{2x^3}{x+6x^2+12x^3+8x^4}}\right)^2}$ $\left[\sqrt[4]{\frac{x}{2x+1}}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti anche somme e sottrazioni fra radicali supponendo positivi i fattori letterali.

68 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt{12}+\sqrt{75}-3\sqrt{3}-3\sqrt{27}$

Ricordiamo che si possono sommare solo i radicali simili; per vedere se ce ne sono, trasportiamo fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=(2+5-3-9)\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$$

69 $\sqrt{20}+\sqrt[4]{25}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$ $\left[\frac{13}{4}\sqrt{5}\right]$

70 $\sqrt{12}-\sqrt[4]{9}+2\sqrt{48}+9\sqrt{3}$ $[18\sqrt{3}]$

71 $\sqrt{\frac{28}{25}}-\sqrt{\frac{343}{100}}+\frac{3}{10}\sqrt{7}(1-\sqrt{49})$ $\left[-\frac{21}{10}\sqrt{7}\right]$

72 $\sqrt[3]{54}-\sqrt[6]{4}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{250}$ $[3\sqrt[3]{2}]$

73 $(3\sqrt{3}-1)^2+\frac{\sqrt{12}}{5}+4\sqrt[6]{27}$ $\left[28-\frac{8}{5}\sqrt{3}\right]$

74 $\sqrt{16b}-\frac{5}{9}\sqrt[4]{b^2}-\frac{1}{b}\sqrt{25b^3}$ $\left[-\frac{14}{9}\sqrt{b}\right]$

75 $\sqrt[4]{t^3}+\sqrt[4]{16t^3}-\sqrt[4]{81t^3}$ $[0]$

76 $\frac{1}{3}\sqrt{4x-12y}-2\sqrt{x-3y}+\sqrt{\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}y}$ $[-\sqrt{x-3y}]$

77 $\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x^6}+\sqrt{4x^3}-\frac{1}{5}\sqrt{9x^3}$ $\left[\frac{7}{5}x\sqrt{x}\right]$

78 $\sqrt{ab^2}-\sqrt{\frac{a^3b^2}{4a^2}}-\sqrt{16ab^2}+\sqrt[4]{b^4a^2}$ $\left[-\frac{5}{2}b\sqrt{a}\right]$

79 $\sqrt{4x^2-24}-\sqrt{\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}}-\sqrt{x^2-6}$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^2-6}\right]$

80 $\sqrt[4]{9a^2-12a+4}-\frac{1}{3}\sqrt{9a-9}-\sqrt{3a-2}$ $[-\sqrt{a-1}]$

81 $\sqrt{4b+4}-\sqrt[6]{3b+3b^2+b^3+1}+\sqrt{b+1}$ $[2\sqrt{b+1}]$

82 **ESERCIZIO GUIDATO**

$(\sqrt{2}+1)^2-2(\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

Applicando le regole dei prodotti notevoli si ottiene:

$$2+1+2\sqrt{2}-2(3+4-4\sqrt{3})+3-5$$

Completa il calcolo. $[2\sqrt{2}+8\sqrt{3}-13]$

83 $(2+\sqrt{7})^2-(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2+(4+\sqrt{7})^2$ $[12\sqrt{7}+7]$

84 $(1+\sqrt{2})^3-(\sqrt{3}-1)^2-5\sqrt{2}$ $[2\sqrt{3}+3]$

85 $\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2}$ $\left[2\sqrt{3}-\frac{10}{9}\right]$

86 $(2+\sqrt{5})^2+(\sqrt{3}-3)^2-(1-\sqrt{3})^3$ $[4\sqrt{5}+11]$

87 $(\sqrt{5}+1)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2-(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$ $[8-\sqrt{15}]$

88 $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2-\sqrt{3})+(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt{2a}-1)(\sqrt{2a}+1)$ $[3\sqrt{a}+\sqrt{3}-\sqrt{3a}]$

89 $(\sqrt{2a-1}+\sqrt{a+1})^2-\sqrt{4a+8a^2-4}$ $[3a]$

90 $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax})-(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2$ $[-2\sqrt{ax}]$

91 $(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})^2+2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ $[2x-1]$

92 $(\sqrt[3]{x+1}+1)^3-(\sqrt{x+2}-1)^2-3\sqrt[3]{x+1}(1+\sqrt[3]{x+1})$ $[2\sqrt{x+2}-1]$

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni.

93 $\frac{4}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[2\sqrt{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

94 $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$ $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{3+2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right]$

95 $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{6}{\sqrt[3]{12}}$ $[2\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{18}]$

96 $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ $\frac{4}{2\sqrt{6}}$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

97 $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$ $\frac{6+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\left[\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6};2\sqrt{3}+1\right]$

98 $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$ $\frac{2}{3\sqrt[4]{8}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{2}}{4};\frac{\sqrt[4]{2}}{3}\right]$

99 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

Al fine di ottenere una differenza di quadrati, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{5}+1$:

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\sqrt{5}+1$$

100 $\frac{4}{\sqrt{2}+1}$ $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ $[4\sqrt{2}-4;3\sqrt{3}+6]$

101 $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ $\left[2\sqrt{3}-2\sqrt{2};\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right]$

102 $\frac{3}{\sqrt{7}+1}$ $\frac{4}{1-\sqrt{5}}$ $\left[\frac{\sqrt{7}-1}{2};-\sqrt{5}-1\right]$

103 $\dfrac{1}{2+\sqrt{6}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ $\left[\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}; \sqrt{3}-1\right]$

104 $\dfrac{7}{\sqrt{11}+2}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{5}+3}$ $\left[\sqrt{11}-2; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$

105 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ $\left[\sqrt{3}-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\right]$

106 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}; 2\sqrt{6}+5\right]$

107 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\quad \dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$ $\left[\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1; \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right]$

108 $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ $\quad \dfrac{15}{2\sqrt[3]{2}-1}$ $\left[6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}+6; 2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}+1\right]$

109 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+1}$ $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}; 2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}+3\right]$

110 $\dfrac{1}{\sqrt{3x}-1}$ $\quad \dfrac{b-1}{\sqrt{b}-1}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3x}+1}{3x-1}; \sqrt{b}+1\right]$

111 $\dfrac{y}{y-\sqrt{y}}$ $\quad \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1}$ $\left[\dfrac{y+\sqrt{y}}{y-1}; \sqrt{x+3}-1\right]$

112 $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{x-4a}{\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$ $\left[\sqrt{x}-\sqrt{3}; \sqrt{x}+2\sqrt{a}\right]$

113 $\dfrac{\sqrt{3+a}-\sqrt{3-a}}{\sqrt{3+a}+\sqrt{3-a}}$ $\quad \dfrac{4x-1}{\sqrt{5x-3}-\sqrt{x-2}}$ $\left[\dfrac{3-\sqrt{9-a^2}}{a}; \sqrt{x-2}+\sqrt{5x-3}\right]$

Trasforma i seguenti radicali doppi nella somma di radicali semplici.

114 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt{4-\sqrt{7}}$

Calcoliamo dapprima l'espressione a^2-b : $\quad 4^2-7=9=3^2$

Applichiamo adesso la formula: $\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{4+3}{2}}-\sqrt{\dfrac{4-3}{2}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

115 $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ $\quad \sqrt{44+\sqrt{87}}$ $\left[\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{10}); \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{174})\right]$

116 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\quad \sqrt{9-4\sqrt{2}}$ $\left[\sqrt{3}+1; 2\sqrt{2}-1\right]$

117 $\sqrt{15-2\sqrt{26}}$ $\quad \sqrt{12+3\sqrt{7}}$ $\left[\sqrt{13}-\sqrt{2}; \dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{42})\right]$

Calcola, se esiste, il valore dei seguenti radicali algebrici.

118 $\sqrt{12}$ $\sqrt{-8}$ $\sqrt[3]{-54}$

119 $\sqrt{54}$ $\sqrt{125}$ $\sqrt{216}$

120 $\sqrt[3]{12}$ $\sqrt[3]{-56}$ $\sqrt[4]{144}$

Calcola le seguenti potenze con esponente razionale supponendo positive le lettere che vi compaiono.

121 $8^{\frac{2}{3}}$ $25^{\frac{3}{2}}$ $8^{-\frac{1}{4}}$ $2^{-\frac{1}{3}}$ $\left[4;\ 125;\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}};\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$

122 $16^{-\frac{3}{4}}$ $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ $0{,}01^{-\frac{3}{2}}$ $0{,}008^{-\frac{1}{3}}$ $\left[\frac{1}{8};\ \frac{2}{3};\ 1000;\ 5\right]$

123 $\left(\frac{49}{36}a^2\right)^{\frac{3}{2}}$ $(4a^4b^2)^{-\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{16}{9}x^2y^{-3}\right)^{\frac{1}{6}}$ $\left[\frac{343}{216}a^3;\ \frac{1}{8a^6b^3};\ \sqrt[6]{\frac{16x^2}{9y^3}}\right]$

Trasforma in potenze ad esponente razionale supponendo positive le lettere che vi compaiono.

124 $\sqrt[3]{18}$ $\sqrt[4]{180}$ $\sqrt{98}$ $\sqrt[6]{144}$ $\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}};\ 6^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{4}};\ 7\cdot 2^{\frac{1}{2}};\ 12^{\frac{1}{3}}\right]$

125 $\sqrt[4]{a^2b^4x^3}$ $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}$ $\sqrt[3]{x\sqrt{x^2y^3}}$ $\left[a^{\frac{1}{2}}bx^{\frac{3}{4}};\ a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}};\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right]$

126 $\sqrt[5]{3\sqrt{\frac{x^3}{9}}}$ $\sqrt{2a\sqrt{\frac{3}{8}b}}$ $\sqrt[3]{3a\sqrt{ab^2}}$ $\left[x^{\frac{3}{10}};\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}};\ 3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Semplifica i seguenti radicali di cui non è noto il segno dei fattori letterali.

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt[4]{a^6b^4x^2}$

Gli esponenti del radicando e l'indice della radice possono essere tutti divisi per 2: $\sqrt{a^3b^2x}$

Occorre adesso tener presente che, mentre il radicale dato esiste per qualsiasi valore delle lettere a, b e x, il radicale semplificato esiste solo se il prodotto a^3x è positivo; non conoscendo però il segno dei fattori letterali, è necessario usare il modulo. Il radicale semplificato è dunque:

$$\sqrt{|a^3x|b^2}$$

2 $\sqrt[6]{125a^3b^6}$ $\sqrt[12]{81x^8y^4}$ $\left[\sqrt{5ab^2};\ \sqrt[3]{3x^2|y|}\right]$

3 $\sqrt[4]{25a^2x^6}$ $\sqrt[6]{\frac{1}{8}a^3b^6}$ $\left[\sqrt{5|ax^3|};\ \sqrt{\frac{1}{2}ab^2}\right]$

4 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt[4]{36x^2+36x+9}$

Scomponiamo il polinomio del radicando: $\sqrt[4]{9(2x+1)^2}$

Possiamo adesso semplificare: $\sqrt{3(2x+1)}$

Tenendo poi presente che non conosciamo il segno di $2x+1$: $\sqrt{3|2x+1|}$

5 $\sqrt[6]{\dfrac{9a^2b^4}{9a^2-6a+1}}$ $\quad \sqrt[4]{\dfrac{16x^2y^6}{9x^2+12x+4}}$ $\left[\sqrt[3]{3b^2\left|\dfrac{a}{3a-1}\right|};\ \sqrt{4\left|\dfrac{xy^3}{3x+2}\right|}\right]$

6 $\sqrt[4]{9a^2-6a+1}$ $\quad \sqrt[6]{\dfrac{4a+a^2+4}{4a^4}}$ $\left[\sqrt{|3a-1|};\ \sqrt[3]{\dfrac{|a+2|}{2a^2}}\right]$

7 $\sqrt[5]{\dfrac{64a^5b^{12}c^8}{2b^2c^3}}$ $\quad \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^4}+1}$ $\left[2ab^2c;\ \dfrac{x^2+1}{x^2}\right]$

8 $\sqrt[4]{(3x-2)^2(3x+2)^2}$ $\quad \sqrt[4]{\dfrac{(2x-1)(4x^2-4x+1)(x+2x^2-1)}{x+1}}$ $\left[\sqrt{|9x^2-4|};\ |2x-1|\right]$

9 $\sqrt[5]{\dfrac{a^4b^8}{64}(3ab^2-ab^2)}$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{(x+1)^3}}$ $\left[\dfrac{1}{2}ab^2;\ \dfrac{x}{x+1}\right]$

10 $\sqrt[6]{\dfrac{a^6}{(2a+a^2+1)^3}}$ $\quad \sqrt[6]{\dfrac{16(x+2)^5(16x+4x^2+16)(x-2)}{x^8-4x^6}}$ $\left[\left|\dfrac{a}{a+1}\right|;\ 2\left|\dfrac{x+2}{x}\right|\right]$

11 $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2-12x+9}{(2x-3)^6}}$ $\quad \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}\right)(54x-27)}$ $\left[\dfrac{1}{|2x-3|};\ \dfrac{3}{2}(2x-1)\right]$

12 $\sqrt[4]{\dfrac{x^6-6x^3+9}{x^4}}$ $\quad \sqrt{(x+2)^2-2x-4+1}$ $\left[\sqrt{\dfrac{|x^3-3|}{x^2}};\ |x+1|\right]$

13 $\sqrt[6]{\dfrac{(a^2+10a+25)^3}{64a^{12}}}$ $\quad \sqrt{\dfrac{7x-4}{x(3x-4)^2}-\dfrac{2x+4}{3x^3-4x^2}}$ $\left[\dfrac{|a+5|}{2a^2};\ \left|\dfrac{x-4}{x(3x-4)}\right|\right]$

14 $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^2+2x+1}}$ $\quad \sqrt[9]{\dfrac{x^4-9x^3+27x^2-27x}{x^7y^3}}$ $\left[\sqrt{\left|\dfrac{x+y}{x+1}\right|};\ \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x^2y}}\right]$

Trasporta dentro il simbolo di radice tutti i possibili fattori esterni ed opera le opportune semplificazioni.

15 **ESERCIZIO SVOLTO**

a. $a\sqrt{2}$

Poichè non conosciamo il segno del fattore esterno, dobbiamo distinguere due casi:

- se $a > 0$ allora $a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$
- se $a < 0$ allora $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$

b. $x\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{3x}}$

In questo caso per l'esistenza del radicale, essendo a^2 non negativo, il fattore x deve essere positivo; si ha dunque che

$$x\sqrt[3]{\frac{a^2}{3x}} = \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{a^2}{3x}} = \sqrt[3]{\frac{a^2x^2}{3}}$$

16 $b\sqrt{b}$ $(x-2)\sqrt{5}$ $\left[\sqrt{b^3}; x \geq 2: \sqrt{5(x-2)^2}, x < 2: -\sqrt{5(x-2)^2}\right]$

17 $x\sqrt{\dfrac{3a}{x^3}}$ $2a\sqrt{a-1}$ $\left[x > 0: \sqrt{\dfrac{3a}{x}}, x < 0: -\sqrt{\dfrac{3a}{x}}; \sqrt{4a^2(a-1)}\right]$

18 $(a-1)\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{a-1}}$ $x\sqrt{x+2}$ $\left[\sqrt[3]{a^2(a-1)^2}; x > 0: \sqrt{x^2(x+2)}, -2 \leq x \leq 0: -\sqrt{x^2(x+2)}\right]$

19 $(x-3)\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{x-3}}$ $(x-2)\sqrt{x-1}$

$\left[\sqrt[4]{x^2(x-3)^3}; x > 2: \sqrt{(x-2)^2(x-1)}, 1 \leq x \leq 2: -\sqrt{(x-2)^2(x-1)}\right]$

Trasporta fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori.

20 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\sqrt{\dfrac{7a^3b^4}{12x^5}} = \dfrac{ab^2}{2x^2}\sqrt{\dfrac{7a}{3x}}$

Osserviamo che, per l'esistenza del radicale, il rapporto $\dfrac{a}{x}$ è positivo, ma non possiamo conoscere il segno di a e di x presi singolarmente; dobbiamo allora considerare il modulo del fattore a esterno:

$$\sqrt{\frac{7a^3b^4}{12x^5}} = \frac{|a|b^2}{2x^2}\sqrt{\frac{7a}{3x}}$$

21 $\sqrt[4]{\dfrac{a^6x^3y^6}{(x-y)^5}}$ $\sqrt{\dfrac{x^2y^3}{a^4}}$ $\left[\left|\dfrac{ay}{x-y}\right|\sqrt[4]{\dfrac{a^2x^3y^2}{x-y}}; \dfrac{|x|y}{a^2}\sqrt{y}\right]$

22 $\sqrt{\dfrac{x^5+2x^4+x^3}{x^3-3x^2+3x-1}}$ $\sqrt[3]{16x^4-16x^3y}$ $\left[\dfrac{x}{x-1}|x+1|\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}; 2|x|\sqrt[3]{2|x-y|}\right]$

23 $\sqrt{\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a}}$ $\sqrt{\dfrac{a^2x^2-9x^2}{a^2x^2-2ax+1}}$ $\left[\dfrac{|a+2|}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2a}}; \left|\dfrac{x}{ax-1}\right|\sqrt{a^2-9}\right]$

24 $\sqrt[4]{\dfrac{x^5}{16y^4(x^2+2x+1)^2}}$ $\sqrt[3]{\left(x+1+\dfrac{1}{4}x^2\right)\dfrac{12y^4(x+2)}{5x^4}}$ $\left[\dfrac{x}{2|y(x+1)|}\sqrt[4]{x}; \left|\dfrac{y}{x}\right|(x+2)\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{y}{x}\right|}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

25 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}-\dfrac{1}{1-\sqrt{12}}-\dfrac{\sqrt{33}}{\left(\sqrt{11}\right)^3}$ $\left[\dfrac{7}{11}\right]$

26 $\sqrt[4]{45}+\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{4}}$ $\left[\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{45}\right]$

27 $\dfrac{x+4}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4x+16}}:\sqrt[4]{\dfrac{16x+8x^2+x^3}{x^5}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{x+4}{16x^2}}\right]$

28 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}-\dfrac{\sqrt{x-2}}{4}$ $\left[\dfrac{1}{4}\sqrt{x-2}\right]$

29 $\sqrt{\dfrac{a+b^2}{b}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{b^{10}}{(a^2+b^4-2ab^2)(a-b^2)}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(b^4-a^2)^2}{b^8}}$ $\left[(a+b^2)\sqrt[6]{\dfrac{1}{b^5}}\right]$

30 $\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}+\sqrt{6}\dfrac{2x}{x^2-3}-\sqrt{6}\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x+\sqrt{3}}\right)$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}x}{x+\sqrt{3}}\right]$

31 $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}+\dfrac{2x}{1+\sqrt{x^2+1}}-(1+2x)\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}-\dfrac{1-2x}{x^2}$ $[1]$

32 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2+3}}-\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$ $\left[\dfrac{x-3}{x^2-1}\right]$

33 $\dfrac{1}{10\sqrt{2}-12}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+2}+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}+4}-\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{7}{5\sqrt{2}+6}\right)$ $\left[\dfrac{43}{35}\right]$

34 $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x-1}}\right)\cdot\sqrt[6]{(x^2-x)(x-1)^4}$ $\left[2\sqrt{x(x-1)}\right]$

35 $\sqrt[9]{\dfrac{8xy\sqrt{xy}}{\left[(2x+y)^4\sqrt{2x+y}\right]^2}}:\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{xy}}{2(16x^2+4y^2+16xy)^2(2x+y)}}$ $\left[2\sqrt[3]{4(2x+y)^2}\right]$

36 $\sqrt{2a+b^2}-\sqrt{18a+9b^2}+\sqrt{2a^3+a^2b^2}$ $\left[(|a|-2)\sqrt{2a+b^2}\right]$

37 $\sqrt{x^3-x^2-x+1}-\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{4x+4}$ $\left[\sqrt{x+1}\left(|x-1|-|x|+2\right)\right]$

38 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $[1]$

39 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}}:\sqrt[6]{\dfrac{1}{9}\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}}:\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\left[\sqrt[8]{\dfrac{2}{3}}\right]$

40 $\dfrac{1}{1-\sqrt{2a-a^2}}-\dfrac{\sqrt{a}}{1-2a+a^2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2a-a^2}}$ $\left[\dfrac{2-\sqrt{a}}{(a-1)^2}\right]$

41 $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}\right)$ [6]

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

42 $2\sqrt{3}x-1=\left(1+\sqrt{3}\right)(x-1)$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+3\right)\right\}\right]$

43 $\sqrt{2}x-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}\right]$

44 $\sqrt{5}(2-3x)+\left(1+\sqrt{5}\right)x=2\sqrt{5}-1$ $\left[S=\left\{\frac{2\sqrt{5}+1}{19}\right\}\right]$

45 $\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{x}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ $\left[S=\left\{\frac{3\sqrt{2}+5}{7}\right\}\right]$

46 $1-x+\dfrac{x+1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{x+1}{2}$ $\left[S=\left\{-\sqrt{3}-2\right\}\right]$

47 $\dfrac{x+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}+\dfrac{x-\sqrt{7}}{6}-\dfrac{3\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}=0$ $\left[S=\left\{1-4\sqrt{7}\right\}\right]$

48 $\dfrac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{6}}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}\sqrt{18}-\sqrt{6}-2\right\}\right]$

49 $\dfrac{x-\sqrt{3}}{x-3}+\dfrac{x+2\sqrt{3}}{x}=\dfrac{2x^2+3}{x^2-3x}$ $\left[S=\left\{-\frac{9+7\sqrt{3}}{3}\right\}\right]$

50 $\dfrac{2\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2}\right)x}=1$ $\left[S=\left\{3\sqrt{2}+1\right\}\right]$

51 $\sqrt{3}-\dfrac{x}{x+\sqrt{3}}+\dfrac{x}{x-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}x^2}{x^2-3}$ $\left[S=\left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

52 $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\\ 3x-\sqrt{2}=1\end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3},\frac{17-\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

53 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=1\\ x-\sqrt{2}y=0\end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right);\ 2-\sqrt{3}\right)\right\}\right]$

54 $\begin{cases}x=\sqrt{2}y\\ 2x+y=\sqrt{2}\end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{4\sqrt{2}-2}{7},\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right)\right\}\right]$

55 $\begin{cases}\sqrt{5}y+2x=2\sqrt{2}+5\\ x-\dfrac{\sqrt{5}}{5}y=\sqrt{2}-1\end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\right\}\right]$