

Altre forme di indeterminazione risolvibili con il teorema di De L'Hospital

I due teoremi di De L'Hospital si applicano solo nei casi in cui il limite si presenta nelle forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Tuttavia, con alcuni accorgimenti, è possibile ricondurre a una di queste anche le altre forme di indeterminazione. Osserva i casi che ti presentiamo.

Forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$

Tenendo presente che se una funzione tende a ∞ la sua reciproca tende a zero e che, viceversa, se una funzione tende a zero la sua reciproca tende a ∞ , basta riscrivere il prodotto come il quoziente di una delle due funzioni con la reciproca dell'altra.

Per esempio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$ si presenta nella forma $0 \cdot \infty$.

Possiamo trasformarlo nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ in questo modo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}$

Applicando ora il teorema di De L'Hospital si ottiene: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0$

Forma di indeterminazione $\infty - \infty$

In genere, per ricondurre questa forma ad una di quelle indicate, basta semplicemente eseguire i calcoli in modo opportuno, eventualmente eseguendo anche delle scomposizioni. Per esempio, calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$. Raccogliendo a fattor comune il termine x otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right)$$

Sappiamo che l'espressione $\frac{\ln x}{x}$, che si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$ (ricorda la gerarchia degli infiniti); ciò è confermato anche dall'applicazione del teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

In definitiva si ha che: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = +\infty \cdot (0 - 1) = -\infty$

Forme di indeterminazione del tipo 0^0 , 1^∞ , ∞^0

Queste forme si presentano quando si hanno limiti della forma $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$.

Si può allora operare considerando che: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln[f(x)]g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)}$

Se $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow \infty$ allora

- $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ è della forma $\frac{\infty}{\infty}$

- $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ è della forma $\frac{0}{0}$

Nelle forme 0^0 , 1^∞ , ∞^0 si pone

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

È quindi possibile calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)$ che si presenta sempre nella forma $0 \cdot \infty$, analizzata in precedenza. Una volta determinato il valore di questo limite, indichiamolo con k , quello della funzione di partenza è e^k .

Ad esempio, calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$

Calcoliamo quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

Il limite si presenta ora nella forma $\frac{\infty}{\infty}$; applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0^-$$

Allora, ritornando al limite di partenza, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{0^-} = 1^-$.

Il confronto fra logaritmo, potenza ed esponenziale

Abbiamo già visto come si procede al confronto fra le funzioni $\log_a x$, x^α e a^x per $x \rightarrow +\infty$ considerando la gerarchia degli infiniti.

Agli stessi risultati si può pervenire anche applicando i teoremi di De L'Hospital.

Per esempio, tenendo conto che tutti i limiti dei rapporti fra queste funzioni si presentano nella forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$ e che le funzioni elencate soddisfano le ipotesi dei teoremi, si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\dots \cdot 2 \cdot 1} = +\infty$$

ESERCIZI

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \cdot \ln(1-x)$$

Il limite si presenta nella forma $0 \cdot \infty$; per riportarlo in una delle forme in cui è applicabile il teorema di de L'Hospital puoi riscriverlo così

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{x-1}} \quad \text{in modo da ricondursi nella forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Applica adesso il teorema.

[0]

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+2} \cdot (x^4 - 5x + 1) \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x-1} \cdot (x^3 + x - 2) \qquad [0; 0]$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan x \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot e^x \qquad [-1; 0]$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x) \cdot \ln x \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) \qquad [0; -\infty]$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x^3}\right) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \qquad [+\infty; +\infty]$$

6 ESERCIZIO GUIDATO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x)^{2x}$$

Il limite si presenta nella forma di indeterminazione 0^0 ; ricordando che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, possiamo riscrivere il limite in questo modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x)^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln(x^2 + 2x)}$$

Calcoliamo il limite a cui tende l'esponente: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x^2 + 2x)$

si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, riscriviamolo in modo da poter applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2x}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2(x+1)}{x(x+2)} \cdot (-2x^2) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{4x(x+1)}{x+2} \right] = 0$$

Ritornando al limite iniziale: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln(x^2 + 2x)} = e^0 = 1$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)] \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)e^{-x} \qquad [1; 0]$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5}(3x - 3 \sin x)x^{-3} \qquad \left[1; \frac{1}{10}\right]$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x} \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) \qquad [\infty; 0]$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{1 - e^{x^2}} \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{e^{\frac{1}{x}}} \qquad [\infty; 0]$$

$$11 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} \qquad [1; 1]$$

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \qquad [1; 1]$$

$$13 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2} \qquad [1; 1]$$