Concetti chiave e regole

L'integrale indefinito

La funzione $F(x)$ è la **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ se per tutti i punti di tale intervallo è $F'(x) = f(x)$. Una funzione $f(x)$ ha infinite primitive che sono però definite a meno di una costante additiva; l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ è il suo **integrale indefinito**:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Affinché esista l'integrale indefinito, la funzione $f(x)$ deve essere continua.
L'integrale indefinito gode di alcune proprietà:

- si può portare fuori dal simbolo di integrazione una costante moltiplicativa: $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$ con $k \in R$
- l'integrale della somma di due o più funzioni è la somma degli integrali delle singole funzioni:
  $$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

I metodi di integrazione

Per calcolare l'integrale indefinito di una funzione si applicano le regole di integrazione delle funzioni fondamentali e le proprietà di linearità.
Nel caso di una **funzione razionale fratta**, dopo aver eventualmente eseguito la divisione del numeratore per il denominatore in modo da ottenere una frazione propria, si opera in questo modo:

- se il denominatore si può scomporre nel prodotto di due o più fattori:
  - si scompone il denominatore della frazione
  - si scrive la funzione come somma di altre frazioni che hanno come denominatori i fattori della scomposizione
  - si integra ciascuna frazione ottenuta;
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ con $b^2 - 4ac < 0$, si scrive il trinomio al denominatore come una somma di quadrati e si integra applicando la regola dell'arcotangente.

- **Metodo di integrazione per parti.** Si usa quando la funzione integranda può essere vista come il prodotto di due funzioni, una delle quali è la derivata di una funzione nota; se $f'(x)$ è la derivata della funzione nota e $g(x)$ è l'altro fattore del prodotto, la formula di integrazione per parti è la seguente:
  $$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$
- **Metodo di sostituzione.** Si usa quando, operando un cambio di variabile, si ottiene un integrale facilmente calcolabile. Per applicare questo metodo:
  - si opera la sostituzione $x = g(t)$
  - si calcola il differenziale dei due membri della precedente relazione
  - si operano le sostituzioni
  - si integra e si applicano le sostituzioni inverse alla primitiva ottenuta.

Alcune comode formule di integrazione, ottenute applicando uno dei metodi precedenti, sono poi le seguenti:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + k}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{x}{\sqrt{k}} + c$ e $\displaystyle\int \frac{1}{[f(x)]^2 + k} \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{f(x)}{\sqrt{k}} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{k - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + c$ e $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{k - [f(x)]^2}} \cdot f'(x)dx = \arcsin\frac{f(x)}{\sqrt{k}} + c$

L'integrale definito e il teorema fondamentale

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a, b]$, si chiama **trapezoide** la parte di piano delimitata dalla curva corrispondente, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$. L'area di un trapezoide si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

che prende il nome di **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

- **Teorema della media**. Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ per il quale vale la relazione:
$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Considerata una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$, il suo integrale calcolato fra a e un punto x variabile in $[a, b]$ è esso stesso una funzione che si chiama **funzione integrale;** tale funzione ha espressione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con } x \in [a, b]$$

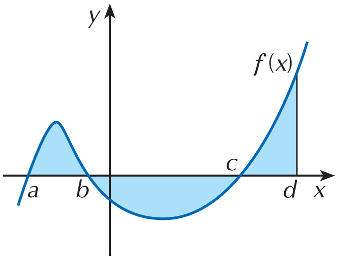
La funzione integrale ha come proprietà che la sua derivata coincide con $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$.

Per calcolare il valore di un integrale definito si usa la **formula di Newton-Leibniz;** se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha che:

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[\varphi(x)\Big]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

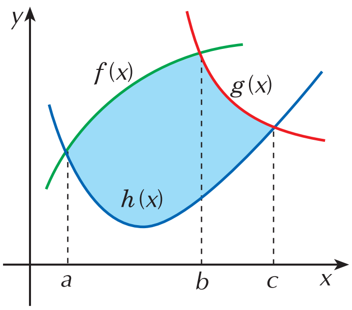
Il calcolo delle aree

Per calcolare l'area di una regione finita di piano delimitata da una funzione continua $f(x)$ e dall'asse delle ascisse in un intervallo $[a, b]$ si deve calcolare l'integrale definito di $f(x)$ fra a e b quando $f(x)$ è positiva o nulla, l'opposto di questo integrale se $f(x)$ è negativa.
In pratica, si individuano gli intervalli dell'asse x nei quali la funzione $f(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa e poi si calcolano gli integrali definiti in questi intervalli prendendoli con segno positivo quando $f(x) \geq 0$, con segno negativo quando $f(x) < 0$. Con riferimento alla figura a lato:



$$\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

Se la superficie di cui calcolare l'area è delimitata da più funzioni come nella figura a lato, si affrontano i seguenti passi:



- si individuano le ascisse dei punti di intersezione di ciascuna coppia di curve
- si calcolano gli integrali definiti in ciascuno degli intervalli individuati da tali punti, ad iniziare da uno di essi e percorrendo il contorno della figura in senso orario:
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx + \int_c^a h(x)dx$$

Il calcolo dei volumi

Con il calcolo di un integrale definito si possono anche calcolare misure di volumi, di superfici di rotazione, di lunghezze di linee curve. Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$:

- il volume V del solido generato da $f(x)$ in una rotazione completa attorno all'asse x si calcola con la formula:
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$
- il volume V del solido generato da $f(x)$ in una rotazione completa attorno all'asse y si calcola con la formula:
$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx \qquad \text{oppure} \qquad \pi \int_p^q [g(y)]^2 dy \quad \text{se } g(y) = f^{-1}(x) \quad \text{e } p = f(a),\ q = f(b)$$

Gli integrali impropri

Quando la funzione diventa infinita in uno degli estremi di integrazione oppure quando uno degli estremi è infinito si parla di **integrale improprio**:

- se $f(x)$ diventa infinita in $x=a$ e/o $x=b$, si dice che la funzione è integrabile se esistono finiti i limiti

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b} f(x)dx \qquad \lim_{k\to 0^+}\int_{a}^{b-k} f(x)dx$$

- se uno degli estremi di integrazione è infinito, si dice che la funzione è integrabile se esistono finiti i limiti

$$\lim_{a\to -\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad \lim_{b\to +\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

L'integrazione numerica

Quando non è possibile o non è conveniente calcolare il valore esatto dell'integrale definito di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$, se ne può calcolare un valore approssimato I procedendo in questo modo:

- si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di parti uguali di ampiezza $h=\dfrac{b-a}{n}$
- si approssima la funzione f in ciascuno degli intervalli ottenuti con una funzione F
- si integra F nell'intervallo corrispondente
- si sommano i valori ottenuti.

A seconda della funzione F che si sceglie si ottengono i diversi metodi di integrazione numerica:

- con il **metodo dei rettangoli** la funzione F è una retta parallela all'asse x e si ha che:

$$I=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad \text{oppure} \qquad I=h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

- con il **metodo dei trapezi** la funzione F è la retta che passa per i punti estremi di ciascun intervallo e si ha che:

$$I=h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]$$

- con il **metodo delle parabole** la funzione F è la parabola che passa per i punti estremi e per il punto medio di ciascun intervallo e si ha che:

$$I=\frac{1}{3}h\cdot\left[y_0+y_{2n}+4\underbrace{(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})}_{\text{ordinate dei punti di indice dispari}}+2\underbrace{(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})}_{\substack{\text{ordinate dei punti di indice pari}\\ \text{esclusi } y_0 \text{ e } y_{2n}}}\right]$$

L'errore

L'errore che si introduce nella valutazione dell'integrale definito della funzione $f(x)$ con ciascuno dei tre metodi di approssimazione, posto $f_M^{(k)}=\max\limits_{x_0\le x\le x_n}\left|f^{(k)}(x)\right|$, è:

- $E_{\text{rettangoli}}\le\dfrac{(b-a)^2}{n}\cdot\dfrac{f'_M}{2}$
- $E_{\text{trapezi}}\le\dfrac{(b-a)^3}{n^2}\cdot\dfrac{f''_M}{12}$
- $E_{\text{parabole}}\le\dfrac{(b-a)^5}{n^4}\cdot\dfrac{f_M^{(4)}}{2880}$