APPROFONDIMENTO

Altre forme di indeterminazione risolvibili con il teorema di De L'Hospital

I due teoremi di De L'Hospital si applicano solo nei casi in cui il limite si presenta nelle forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Tuttavia, con alcuni accorgimenti, è possibile ricondurre a una di queste anche le altre forme di indeterminazione. Osserva i casi che ti presentiamo.

Se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ allora

- $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ *è della forma* $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ *è della forma* $\dfrac{0}{0}$

Forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$

Tenendo presente che se una funzione tende a ∞ la sua reciproca tende a zero e che, viceversa, se una funzione tende a zero la sua reciproca tende a ∞, basta riscrivere il prodotto come il quoziente di una delle due funzioni con la reciproca dell'altra.

Per esempio: $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x$ si presenta nella forma $0 \cdot \infty$.

Possiamo trasformarlo nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ in questo modo: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}$

Applicando ora il teorema di De L'Hospital si ottiene: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} -\dfrac{x^3}{3} = 0$

Forma di indeterminazione $\infty - \infty$

In genere, per ricondurre questa forma ad una di quelle indicate, basta semplicemente eseguire i calcoli in modo opportuno, eventualmente eseguendo anche delle scomposizioni. Per esempio, calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x)$. Raccogliendo a fattor comune il termine x otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$$

Sappiamo che l'espressione $\frac{\ln x}{x}$, che si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, tende a 0 per $x \to +\infty$ (ricorda la gerarchia degli infiniti); ciò è confermato anche dall'applicazione del teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

In definitiva si ha che: $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = +\infty \cdot (0-1) = -\infty$

Nelle forme 0^0, 1^∞, ∞^0 si pone

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Forme di indeterminazione del tipo 0^0, 1^∞, ∞^0

Queste forme si presentano quando si hanno limiti della forma $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.

Si può allora operare considerando che: $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}$

È quindi possibile calcolare $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\ln f(x)$ che si presenta sempre nella forma $0 \cdot \infty$, analizzata in precedenza. Una volta determinato il valore di questo limite, indichiamolo con k, quello della funzione di partenza è e^k.
Ad esempio, calcoliamo $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

Calcoliamo quindi $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$

Il limite si presenta ora nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$; applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0^-$$

Allora, ritornando al limite di partenza, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^{0^-} = 1^-$.

Il confronto fra logaritmo, potenza ed esponenziale

Abbiamo già visto come si procede al confronto fra le funzioni $\log_a x$, x^α e a^x per $x \to +\infty$ considerando la gerarchia degli infiniti.
Agli stessi risultati si può pervenire anche applicando i teoremi di De L'Hospital.
Per esempio, tenendo conto che tutti i limiti dei rapporti fra queste funzioni si presentano nella forma di indeterminazione $\dfrac{\infty}{\infty}$ e che le funzioni elencate soddisfano le ipotesi dei teoremi, si ha che:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1} = +\infty$

ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) \cdot \ln(1-x)$

Il limite si presenta nella forma $0 \cdot \infty$; per riportarlo in una delle forme in cui è applicabile il teorema di de L'Hospital puoi riscriverlo così

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{x-1}} \quad \text{in modo da ricondursi nella forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Applica adesso il teorema. [0]

2 $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x+2}\cdot(x^4-5x+1)$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} e^{4x-1}\cdot(x^3+x-2)$ $\qquad$ $[0;\ 0]$

3 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} x^5\cdot e^x$ $\qquad$ $[-1;\ 0]$

4 $\lim_{x\to0^+} (x+\sin x)\cdot\ln x$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} (\ln x-x^2)$ $\qquad$ $[0;\ -\infty]$

5 $\lim_{x\to0^+} \left(\ln x+\frac{1}{x^3}\right)$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} (e^x-x)$ $\qquad$ $[+\infty;\ +\infty]$

6 ## ESERCIZIO GUIDATO

$\lim_{x\to0^+}(x^2+2x)^{2x}$

Il limite si presenta nella forma di indeterminazione 0^0; ricordando che $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, possiamo riscrivere il limite in questo modo:

$$\lim_{x\to0^+}(x^2+2x)^{2x}=\lim_{x\to0^+}e^{2x\ln\left(x^2+2x\right)}$$

Calcoliamo il limite a cui tende l'esponente: $\lim_{x\to0^+} 2x\ln(x^2+2x)$

si presenta nella forma $0\cdot\infty$, riscriviamolo in modo da poter applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x^2+2x)}{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x+2}{x^2+2x}}{-\frac{1}{2x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2(x+1)}{x(x+2)}\cdot(-2x^2)\right]=\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{4x(x+1)}{x+2}\right]=0$$

Ritornando al limite iniziale: $\lim_{x\to0^+}e^{2x\ln\left(x^2+2x\right)}=e^0=1$

7 $\lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)\,e^{-x}$ $\qquad$ $[1;\ 0]$

8 $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\sqrt{x}-1}$ $\qquad$ $\lim_{x\to0}\frac{1}{5}(3x-3\sin x)x^{-3}$ $\qquad$ $\left[1;\ \frac{1}{10}\right]$

9 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x-\sin x}$ $\qquad$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\tan x\right)$ $\qquad$ $[\infty;\ 0]$

10 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{1-e^{x^2}}$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\ln x}}{e^{\frac{1}{x}}}$ $\qquad$ $[\infty;\ 0]$

11 $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}$ $\qquad$ $[1;\ 1]$

12 $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $[1;\ 1]$

13 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $\qquad$ $[1;\ 1]$