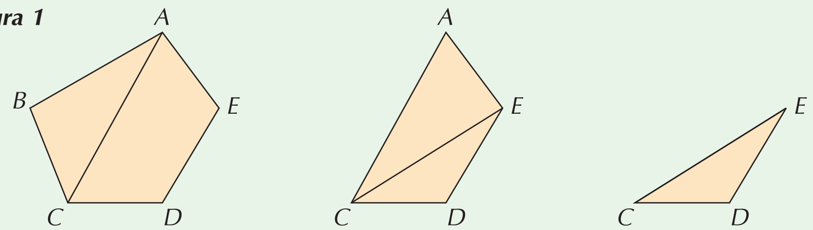
Approfondimento

Gli algoritmi ricorsivi

Per calcolare la somma degli angoli interni di un poligono, per esempio di un pentagono, si può procedere in questo modo (***figura 1***):

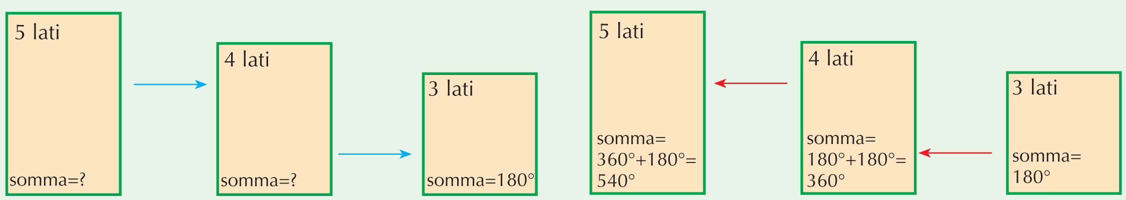
- tracciando una opportuna diagonale si costruisce il poligono che ha un lato di meno, cioè un quadrilatero
- tracciando un’altra diagonale si costruisce il poligono che ha un lato di meno, cioè un triangolo.

Figura 1



Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, procedendo a ritroso e aggiungendo ad ogni passaggio 180° (gli angoli del triangolo eliminato), si valuta che la somma degli angoli interni di un pentagono è 540° (***figura 2***).

Figura 2



Questo modo di ragionare utilizza una procedura che si chiama *ricorsione*.

Un algoritmo si dice **ricorsivo** se nella sua definizione compare un riferimento a sé stesso.

La ricorsione si basa sul **principio di induzione** in base al quale:

data una proprietà $P(n)$, che dipende da un numero naturale n

- se $P(n_0)$ è vera, cioè la proprietà P è vera per un particolare valore di n
- se, considerato $n > n_0$, e supposto che $P(n)$ sia vera, anche $P(n+1)$ è vera

allora $P(n)$ è vera per qualsiasi valore di n.

In pratica un algoritmo ricorsivo richiama ogni volta la stessa procedura in un caso più semplice del precedente, fino a giungere ad un caso noto; a questo punto il processo si percorre in senso inverso per trovare il risultato desiderato.

Un classico esempio di situazione in cui è possibile applicare questo tipo di algoritmo è quello del calcolo della potenza n-esima di un numero a non nullo.

Poiché la potenza n-esima di un numero a è uguale alla potenza di esponente $n-1$ moltiplicata per a (ad esempio $a^5 = a^4 \cdot a$), possiamo definire a^n in modo ricorsivo ponendo

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \end{cases}$$

Questo significa che il calcolo di a^n richiama se stesso nella situazione più semplice del calcolo di a^{n-1}, che a sua volta richiama se stesso nella situazione più semplice del calcolo di a^{n-2}, e così via, fino alla situazione più semplice di tutte che è quella in cui si sa che $a^0 = 1$. Il processo può ora essere invertito per calcolare a^n.

Un algoritmo che tiene conto di quanto detto è dunque il seguente

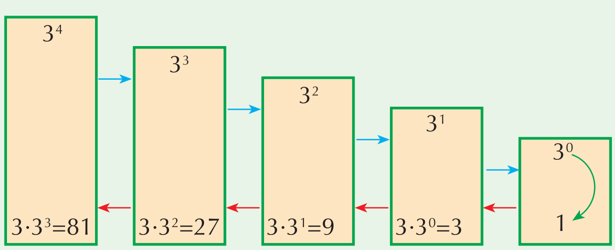
```
inizio
 leggi (a,n);
 p := potenza (a,n);
 scrivi (p);
fine.
```

La funzione "potenza" che viene richiamata costituisce la parte ricorsiva dell'algoritmo ed ha la seguente formulazione

```
funzione Potenza (a,n)
inizio
   se n = 0 allora Potenza = 1
      altrimenti Potenza = a · Potenza(a,n – 1)
fine.
```

La parte evidenziata in nero è il richiamo della funzione a sé stessa in una situazione immediatamente precedente.
Da notare le variabili a e n della funzione che costituiscono l'argomento della funzione stessa. In ***figura 3*** puoi vedere come viene eseguito l'algoritmo nel caso in cui $n = 4$ e $a = 3$.

Figura 3



I esempio.

Scriviamo un algoritmo ricorsivo per calcolare il fattoriale di un numero n.

Ricordiamo che $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e che si pone $0! = 1$.

Il fattoriale di un numero può allora essere definito in modo ricorsivo come segue

- $0! = 1$
- $n! = n \cdot (n-1)!$

Un algoritmo che tiene conto di questa definizione è il seguente

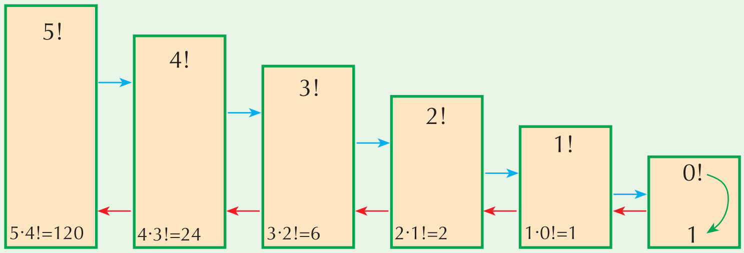
```
inizio
   leggi (n);
   f := fattoriale (n);
   scrivi (f );
fine.
```

La funzione "fattoriale" che viene richiamata nella parte principale dell'algoritmo ha la seguente formulazione ricorsiva

```
funzione Fattoriale (n)
inizio
   se n = 0 allora Fattoriale = 1
      altrimenti Fattoriale = n · Fattoriale (n – 1)
fine
```

In nero abbiamo evidenziato il richiamo della funzione a se stessa. In ***figura 4*** puoi vedere come viene eseguito l'algoritmo nel caso in cui $n = 5$.

Figura 4



II esempio.

Anche il calcolo del massimo comun divisore fra due numeri a e b può essere realizzato tramite un algoritmo ricorsivo con il metodo euclideo. Sappiamo infatti che

$$\text{M.C.D.}(a,b) = \text{M.C.D.}(b,r) \quad \text{dove } r \text{ è il resto della divisione di } a \text{ per } b$$

Possiamo quindi definire il massimo comun divisore in modo induttivo come segue

- M.C.D.$(k,0) = k$
- M.C.D.(a,b) = M.C.D.$(b, a \bmod b)$ l'operatore   mod   calcola il resto della divisione di a per b

La funzione ricorsiva che ne risulta è la seguente

```
funzione MCD (a,b)
inizio
   se b = 0 allora MCD = a
      altrimenti MCD = MCD (b,a mod b)
fine
```

Completa l'algoritmo scrivendo la parte principale.

ESERCIZI

1 La successione 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... può essere definita in modo ricorsivo dalla relazione:

a. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \left(\sqrt{a_{n-1}} + 1\right)^2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = (a_{n-1} + 1)^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = (a_{n-1} + n)^2 \end{cases}$ [a.]

2 La funzione ricorsiva $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ genera la successione di numeri:

a. 1, 2, 3, 5, 7, 9, 13, ... **b.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

c. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... **d.** 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, ... [c.]

3 Qual è l'output del seguente algoritmo?

inizio
 leggi (a);
 b := kappa(a);
 scrivi (b);
fine.

dove la funzione kappa è la seguente

funzione kappa (x : integer): real;
inizio
 se $x \leq 0$ allora kappa := 2 altrimenti kappa := $2 \cdot$ kappa($x - 1$);
fine.

4 Scrivi una funzione ricorsiva che, assegnati due interi N1 ed N2, restituisca la somma di tutti gli interi compresi tra N1 ed N2.

5 Scrivi un algoritmo ricorsivo che generi i numeri della successione $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots, \frac{99}{100}$.

6 Costruisci un algoritmo ricorsivo che generi la tabella dei numeri del triangolo di Tartaglia. (Suggerimento: tali numeri sono, per ogni riga, i coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima di $(a+b)^n$)

```
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5   10  10  5   1
```

7 Scrivi un algoritmo ricorsivo che generi i primi 10 termini di una progressione aritmetica di ragione assegnata d e primo termine assegnato a.

8 Scrivi un algoritmo ricorsivo che generi i primi 10 termini di una progressione geometrica di ragione assegnata q e primo termine assegnato a.