Approfondimento

Il differenziale totale

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme D del piano xy e sia $P(x_0, y_0)$ un punto di D; supponiamo poi che in P esistano le derivate parziali di f.

Si dice **differenziale parziale della funzione *f* rispetto a *x*** relativo al punto P e all'incremento Δx l'espressione $f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x$.

Analogamente

si dice **differenziale parziale della funzione *f* rispetto a *y*** relativo al punto P e all'incremento Δy l'espressione $f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$.

Si dice **differenziale totale della funzione *f*** relativo al punto P e agli incrementi Δx e Δy, e si indica con df, la somma dei differenziali parziali della funzione stessa:

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Osserviamo poi che, se consideriamo le funzioni $h(x, y) = x$ e $g(x, y) = y$, i loro differenziali totali sono rispettivamente

$dh = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$ cioè $dx = \Delta x$

$dg = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y$ cioè $dy = \Delta y$

Δx e Δy sono quindi uguali ai differenziali totali delle variabili indipendenti.

Il differenziale totale in P di una qualunque funzione f è allora esprimibile con la relazione

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Esempio.

Data la funzione $f(x, y) = x\sqrt{y+3}$, calcoliamo il suo differenziale totale nel punto $(2, 1)$.

Calcoliamo le derivate parziali prime: $f'_x = \sqrt{y+3}$ $\qquad f'_y = \dfrac{x}{2\sqrt{y+3}}$

Valutiamole nel punto dato: $f'_x(2, 1) = 2$ $\qquad f'_y(2, 1) = \dfrac{1}{2}$

Il differenziale totale è: $df = 2dx + \dfrac{1}{2}dy$

Se, nel caso di una funzione di una sola variabile, calcolare il differenziale in un punto significa approssimare la funzione con la sua retta tangente, nel caso di una funzione di due variabili calcolare il differenziale totale significa approssimare la funzione con il suo piano tangente.

Ad esempio, se vogliamo calcolare un valore approssimato della funzione f dell'esempio precedente nel punto $A(2{,}02;\ 1{,}04)$, possiamo ricorrere al differenziale calcolato in $(2{,}1)$ e considerare $dx = 0{,}02$ e $dy = 0{,}04$; si ha così che

$$df = 2 \cdot 0{,}02 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}04 = 0{,}06$$

quindi un valore approssimato di f nel punto A è

$$f(2{,}02;\ 1{,}04) = f(2,\ 1) + 0{,}06 = 4{,}06$$

Se calcoliamo, con l'aiuto di una calcolatrice, il valore della funzione in tale punto troviamo che $f(2{,}02;\ 1{,}04) = 4{,}0601497...$ quindi il valore trovato con il differenziale è esatto fino alla seconda cifra decimale.

ESERCIZI

Calcola il differenziale totale delle seguenti funzioni.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$f(x, y) = x^2 + y^3$

Si ha che $f'_x = 2x$, $\quad f'_y = 3y^2$,

quindi $\quad df = 2xdx + 3y^2dy$.

2 $f(x, y) = e^{2x-y}$ $\quad \left[2e^{2x-y}\, dx - e^{2x-y}\, dy\right]$

3 $f(x, y) = 2x \ln y$ $\quad \left[2\ln y\, dx + 2\frac{x}{y}\, dy\right]$

4 $f(x, y) = (2x-5)(4-3y)$ $\quad [2(4-3y)\, dx - 3(2x-5)\, dy]$

5 $f(x, y) = (x+2)e^{\sqrt{y}}$ $\quad \left[e^{\sqrt{y}}\, dx + \frac{(x+2)e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\, dy\right]$

6 $f(x, y) = e^x + e^y$ $\quad [e^x\, dx + e^y\, dy]$

7 $f(x, y) = 2x^3 - 3xy^2$ $\quad \left[(6x^2 - 3y^2)\, dx - 6xy\, dy\right]$

8 $f(x, y) = y^x$ $\quad [y^x \ln y\, dx + xy^{x-1}\, dy]$

9 $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x}$ $\quad \left[-\frac{x+2y}{2x^2\sqrt{x+y}}\, dx + \frac{1}{2x\sqrt{x+y}}\, dy\right]$

10 Il differenziale totale della funzione $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ nel generico punto (x, y) è uguale a:

a. $dz = \dfrac{x^2+y^2}{xy}dx - \dfrac{x^2+y^2}{xy}dy$ $\qquad$ **b.** $dz = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}dx + \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$

c. $dz = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}dx - \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$ $\qquad$ **d.** $dz = -\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dx + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}dy$

11 Un valore approssimato dell'espressione $\sqrt{4,2} + \sin 0,15$ è definito dal differenziale totale della funzione $f(x \cdot y) = \sqrt{x} + \sin y$. Tale valore si calcola con l'espressione:

a. $\left(\frac{1}{4} \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,15\right)$

b. $\left(\frac{1}{4} \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,15\right)$

c. $2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,15\right)$

d. $2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,15\right)$

12 Servendoti del differenziale totale della funzione $z = \sin x + \ln y$ nel punto $(0, 1)$, calcola un valore approssimato di $z = \sin 0,51 + \ln 1,3$. [0,81]

13 Calcola un valore approssimato di $3,21^{2,25}$ servendoti del differenziale della funzione $z = x^y$ nel punto $(3, 2)$. [12,7319]