

Concetti chiave e regole

Funzioni

Una **funzione** è una corrispondenza univoca fra un insieme D di elementi x ed un insieme E di elementi y , cioè è una legge che ad ogni elemento di D associa uno e un solo elemento di E .

Se D ed E sono insiemi numerici, la legge che lega y ad x si può esprimere mediante una relazione algebrica nella forma $y = f(x)$.

Intervalli, intorno e punti di accumulazione

Si chiama **intervallo** un qualunque insieme di numeri reali compresi fra altri due a e b , dove a o b possono essere finiti o infiniti. In particolare:

- (a, b) è un intervallo aperto che corrisponde all'insieme degli x tali che $a < x < b$
- $[a, b]$ è un intervallo chiuso che corrisponde all'insieme degli x tali che $a \leq x \leq b$

In pratica, la parentesi tonda indica che l'estremo dell'intervallo non appartiene all'insieme, la parentesi quadra indica che gli appartiene; sui simboli di ∞ si usa solo la parentesi tonda.

Intorno di un punto x_0 è ogni intervallo aperto che contiene x_0 al suo interno; intorno di $+\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(a, +\infty)$, intorno di $-\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(-\infty, b)$, intorno di infinito è l'unione di un intorno di $-\infty$ con un intorno di $+\infty$.

Un punto x_0 si dice di **accumulazione** per un insieme E se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E .

Le definizioni di limite

Una funzione ha per limite un numero ℓ finito per $x \rightarrow c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ha fra le sue soluzioni un intorno di c .

Una funzione ha per limite ∞ per $x \rightarrow c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x)| > M$ è verificata in un intorno di c .

Teoremi sui limiti

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell'$ e ℓ e ℓ' sono due valori finiti, allora:

- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm \ell'$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot \ell'$
- $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k\ell$ con $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \ell^n$
- $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\ell}{\ell'}$ se $\ell' \neq 0$

Le forme di indeterminazione

Nel calcolo di un limite, generalmente quando c è infinito oppure i limiti ℓ e ℓ' sono nulli, si può giungere a quelle che si chiamano **forme di indeterminazione** che sono:

$$\begin{array}{cccc} (+\infty) - (+\infty) & (+\infty) + (-\infty) & 0 \cdot (\pm\infty) & \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \\ \frac{0}{0} & 1^{\pm\infty} & 0^0 & (\pm\infty)^0 \end{array}$$

Per risolvere alcune di queste forme occorre tenere presenti queste regole:

- il limite per $x \rightarrow \infty$ di un polinomio è uguale al limite del termine di grado massimo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n$$

- il limite per $x \rightarrow \infty$ del rapporto fra due polinomi è uguale al limite del rapporto fra i termini di grado massimo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^k + \dots + a_k}{b_0 x^h + \dots + b_h} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^k}{b_0 x^h}$$

e si ha che: - se $k > h$ il limite vale ∞ ; - se $k = h$ il limite vale $\frac{a_0}{b_0}$; - se $k < h$ il limite vale 0

- se $\lim_{x \rightarrow c} \frac{A(x)}{B(x)}$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si semplifica la frazione scomponendo i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene
- se $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} \right)$ si presenta nella forma $\infty - \infty$, si moltiplica e si divide per $\left(\sqrt{A(x)} \mp \sqrt{B(x)} \right)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene.

I limiti notevoli

Valgono i seguenti limiti notevoli:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ quando $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ e $\lim_{x \rightarrow c} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e$ quando $f(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow c$

Le successioni

Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme N dei numeri naturali.

Indicata con a_n l'espressione del suo termine generale, una successione può essere:

- **convergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$
cioè se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che $\forall n > \nu$ sia $|a_n - \ell| < \varepsilon$
- **divergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$
cioè se, $\forall M > 0$, esiste un indice ν tale che $\forall n > \nu$ sia rispettivamente $a_n > M$ o $a_n < -M$.
- **irregolare** se né converge né diverge.

Per il calcolo del limite di una successione valgono teoremi analoghi a quelli studiati per i limiti delle funzioni di numeri reali.