APPROFONDIMENTO

I fasci di parabole

Quando l'equazione di una parabola dipende da un parametro, non abbiamo più una sola parabola, ne abbiamo infinite, una per ogni valore del parametro. L'equazione rappresenta allora un **fascio di parabole**.
Per esempio:

$$y = kx^2 + (1 - k)x - 2k$$

è l'equazione di un fascio di parabole con asse parallelo all'asse y.
Le parabole di un fascio possono avere dei punti in comune che chiamiamo **punti base**. Essi si determinano intersecando due qualsiasi parabole del fascio. Nel caso del precedente esempio, intersechiamo le parabole che otteniamo per:

$$\begin{matrix} k = 1 \\ k = -1 \end{matrix} \quad \begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il fascio ha due punti base di coordinate $A(-1, -1)$ e $B(2, 2)$. Tutte le parabole di questo fascio passano per gli stessi due punti (***figura 1***).
Osserviamo che per $k = 0$ otteniamo la retta $y = x$, che passa anch'essa per i punti base A e B.

In generale, un fascio di parabole può avere:

- due punti base distinti come nel caso precedente
- due punti base coincidenti in un punto P, come nel caso delle ***figura 2a*** in cui le parabole sono tangenti, cioè hanno la stessa retta tangente in P
- un solo punto base, come nel caso della ***figura 2b*** in cui le parabole si intersecano in un solo punto
- nessun punto base, come nel caso della ***figura 2c*** in cui le parabole non si intersecano.

In modo analogo, l'equazione:

$$x = (k + 1)y^2 - 2ky + k$$

rappresenta un fascio di parabole con asse parallelo all'asse x.
Intersechiamo due parabole di questo fascio per trovare i punti base:

$$\begin{matrix} k = 0 \\ k = 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x = y^2 \\ x = 2y^2 - 2y + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il fascio ha un solo punto base di coordinate $(1, 1)$ (***figura 3***).

Esempio

Data l'equazione $y = (k + 2)x^2 - 2kx + 1 + 3k$ che rappresenta un fascio di parabole, vogliamo determinarne il tipo e successivamente scrivere l'equazione della parabola il cui vertice appartiene alla retta $x = 3$.

Figura 1

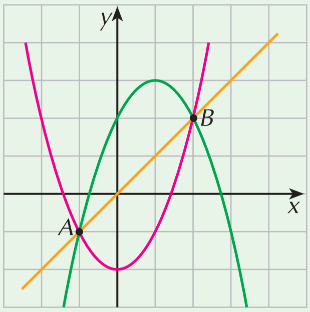


Figura 2

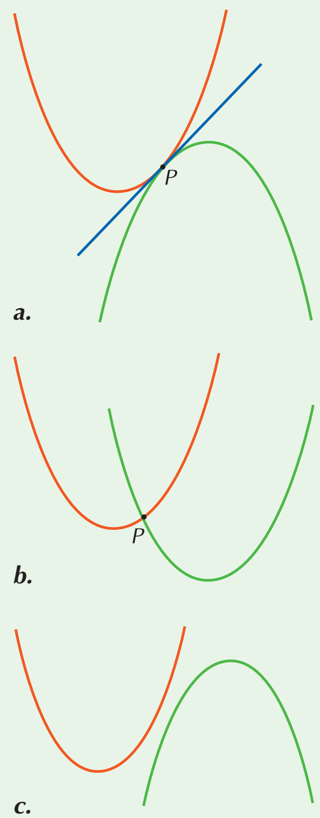
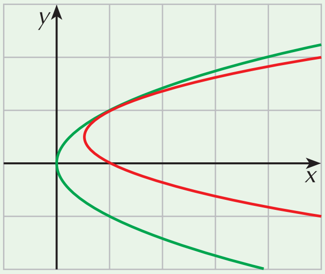


Figura 3



Per determinarne il tipo, dobbiamo stabilire se ci sono dei punti base; possiamo allora intersecare due qualsiasi parabole del fascio, oppure una qualsiasi parabola con la retta la cui equazione appartiene al fascio (si ottiene per $k = -2$). Seguiremo questa seconda possibilità che risulta più semplice nei calcoli.

- Per $k = -2$ otteniamo $y = 4x - 5$ (retta del fascio)
- Per $k = 0$ otteniamo $y = 2x^2 + 1$ (parabola del fascio)

Il sistema delle due equazioni non ha soluzioni reali. Il fascio non ha dunque punti base.
Fra tutte le parabole del fascio, quella il cui vertice appartiene alla retta data ha l'ascissa del vertice uguale a 3.
Quindi, essendo

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2k}{2(k+2)} \quad \text{basta porre} \quad \frac{2k}{2(k+2)} = 3$$

Risolvendo tale equazione otteniamo $k = -3$.
Sostituendo il valore trovato al posto di k nell'equazione del fascio, si ha l'equazione della parabola richiesta: $y = -x^2 + 6x - 8$.

ESERCIZI

1 Di un fascio di parabole si sa che due di esse non hanno punti di intersezione; si può dire che:
a. il fascio non ha punti base V F
b. nessuna parabola del fascio può incontrare un'altra parabola del fascio V F
c. tutte le parabole hanno lo stesso asse di simmetria V F
d. le due generatrici non si intersecano. V F

2 **ESERCIZIO GUIDATO**

Dato il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 + (2k-3)x + 1$ determina:
a. le coordinate dei punti base
b. la parabola del fascio passante per $P(1, 4)$
c. la parabola del fascio avente asse di equazione $x = -4$
d. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = -3x$.

a. I punti base del fascio si possono determinare intersecando due qualsiasi parabole che gli appartengono; per ottenere le loro equazioni puoi attribuire a k due particolari valori. Ad esempio:
- per $k = 1$ ottieni la parabola di equazione $y = x^2 - x + 1$
- per $k = 2$ ottieni la parabola di equazione $y = 2x^2 + x + 1$

Basta adesso risolvere il sistema delle due equazioni.

b. Sostituendo le coordinate di P nell'equazione del fascio ottieni
$4 =$ .... da cui ricavi $k =$ ....
La parabola cercata ha dunque equazione $y =$ ....

c. Per $k \neq 0$, l'asse della generica parabola del fascio ha equazione $x = \frac{3-2k}{2k}$ (ricorda la formula $x = -\frac{b}{2a}$). Nel nostro caso deve essere $\frac{3-2k}{2k} =$ ....

d. Considera il sistema formato dall'equazione del fascio e da quella della retta e imponi la condizione di tangenza.

$\left[\textbf{a.}\ (0, 1), (-2, 7);\ \textbf{b.}\ y = 2x^2 + x + 1;\ \textbf{c.}\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1;\ \textbf{d.}\ y = x^2 - x + 1\right]$

3 Del fascio di parabole rappresentato dall'equazione $y - 2x^2 + 3x + k(y - x^2 + x) = 0$ puoi dire che:

a. il fascio ha almeno un punto base V F

b. il fascio non ha punti base V F

c. la parabola degenere si spezza nelle due rette parallele $x = 0$ e $x = 2$ V F

d. tutte le parabole del fascio passano per l'origine. V F

4 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k+2)x^2 + 4kx + 3(k-1)$ determinane le caratteristiche; successivamente individua:

a. quella passante per $P(1, -2)$ $\left[y = \frac{15}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{27}{8}\right]$

b. quella il cui vertice ha ascissa 0 $[y = 2x^2 - 3]$

c. quella tangente alla retta di equazione $y = -5x$ $\left[y = -\frac{3}{2}x^2 - 14x - \frac{27}{2}\right]$

d. quella che ha il vertice che appartiene alla retta $y + 1 = 0$. $[y = 4x^2 + 8x + 3]$

5 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k+1)x^2 - 3kx - 4$, determina:

a. le coordinate dei punti base $[A(0, -4); B(3, 5)]$

b. la parabola del fascio avente fuoco di ascissa 3 $[y = -x^2 + 6x - 4]$

c. la parabola del fascio passante per $P(-1, 1)$ $[y = 2x^2 - 3x - 4]$

d. le parabole del fascio tangenti alla retta di equazione $y = 2x - 5$. $\left[y = x^2 - 4;\ y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right]$

6 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k-1)x^2 + (k+2)x + 3k$, determina:

a. le coordinate dei punti base [non ci sono punti base]

b. la parabola del fascio con asse coincidente con l'asse y $[y = -3x^2 - 6]$

c. la parabola del fascio passante per l'origine $[y = -x^2 + 2x]$

d. la parabola del fascio passante per $P(-1, 3)$ $[y = x^2 + 4x + 6]$

e. le parabole del fascio aventi direttrice di equazione $y = \frac{7}{4}$. $\left[y = x^2 + 4x + 6;\ y = -\frac{10}{11}x^2 + \frac{23}{11}x + \frac{3}{11}\right]$

7 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k-1)x^2 + 2kx + k - 3$, determina:

a. le coordinate dei punti base e le caratteristiche del fascio
[$A(-1, -4)$; fascio di parabole tangenti in A alla retta di equazione $y = 2x - 2$]

b. la parabola del fascio passante per $P(0, -3)$ $[y = -x^2 - 3]$

c. la parabola del fascio tangente all'asse x $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right]$

d. la parabola del fascio avente vertice sulla retta di equazione $3x - 2y + 6 = 0$.
$\left[y = \frac{1}{11}x^2 + \frac{24}{11}x - \frac{21}{11}\right]$

8 Dato il fascio di parabole di equazione $y - x^2 + 2x + 3 + k(2y + x^2 - 2x - 3) = 0$, determina:

a. le coordinate dei punti base $[A(-1, 0); B(3, 0)]$

b. la parabola del fascio passante per $P(2, 6)$ $[y = -2x^2 + 4x + 6]$

c. la parabola del fascio avente il vertice sulla retta di equazione $x + y - 2 = 0$ $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right]$

d. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = -1$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right]$