Lo sviluppo dell'algebra e le equazioni di secondo grado

Nell'opera del grande matematico arabo **al-Khwarizmi** (780 d.C. - 850 d.C.) ritroviamo alcuni dei passi più significativi dello sviluppo dell'algebra.
Nella sua opera che risale alla prima metà del nono secolo, i termini di un'equazione vengono indicati con nomi diversi: le *radici* rappresentano la variabile x, i *quadrati* rappresentano x^2, i *numeri* rappresentano il termine noto. Egli si occupa di risolvere equazioni di primo e di secondo grado che rientrano in sei tipi fondamentali che descrive a parole in questo modo (fra parentesi la corrispondente scrittura nel simbolismo algebrico moderno):

1. i quadrati sono uguali alle radici ($ax^2 = bx$)
2. i quadrati sono uguali a un numero ($ax^2 = c$)
3. le radici sono uguali a un numero ($ax = c$)
4. i quadrati e le radici sono uguali a un numero ($ax^2 + bx = c$)
5. i quadrati e i numeri sono uguali alle radici ($ax^2 + c = bx$)
6. le radici e i numeri sono uguali ai quadrati ($bx + c = ax^2$)

La spiegazione del perché al-Khwarizmi ricorre a tutte queste forme sta nel fatto che i coefficienti devono essere sempre positivi e che fra i termini devono comparire solo operazioni di addizione; per esempio, non è possibile scrivere un'equazione nella forma $3x^2 - 2x + 5 = 0$, ma la si deve trasformare in $3x^2 + 5 = 2x$ corrispondente alla forma 5 dell'elenco precedente.
Per ricondurre un'equazione ad una di queste tipologie si usano alcune operazioni fondamentali: l'*al-jabr* (letteralmente: *completamento*) che permette di eliminare i termini negativi aggiungendo termini uguali ai due membri (operazione che corrisponde al nostro primo principio di equivalenza); l'*al-muqabala* (letteralmente: *bilanciamento*) che consente di addizionare i termini simili nei due membri; vi è poi una terza operazione, l'*al-hatt*, che permette di ridurre a 1 il coefficiente del termine di secondo grado e che viene usata per le equazioni nelle forme 4 e 5.

Un esempio di equazione di secondo grado tratta dal manuale di al-Khwarizmi è la seguente:
un quadrato e dieci delle sue radici sono uguali a nove e trenta numeri, cioè tu sommi dieci radici a un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta

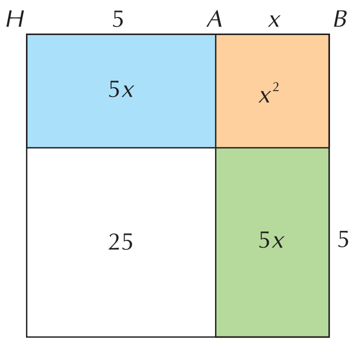
Con il simbolismo algebrico: $x^2 + 10x = 39$
La soluzione viene data in questo modo:

- *prendi metà del numero delle radici, cioè cinque* $\frac{10}{2} = 5$
- *poi moltiplicalo per se stesso e il risultato è cinque e venti* $5 \cdot 5 = 25$
- *somma questo a nove e trenta, il che dà sessantaquattro* $25 + 39 = 64$
- *prendi la radice quadrata, cioè otto* $\sqrt{64} = 8$
- *e sottrai da essa la metà del numero delle radici* $8 - 5 = 3$
- *questa è la radice del quadrato che cercavi ed il suo quadrato è nove.*

In sostanza, al-Khwarizmi indica quali sono le operazioni da fare per trovare la soluzione dell'equazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx = c$:

- prendi metà del numero delle radici $\frac{b}{2}$
- *poi moltiplicalo per se stesso* $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
- *somma questo a c* $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
- *prendi la radice quadrata* $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
- *e sottrai da essa la metà del numero delle radici* $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
- *questa è la radice del quadrato che cercavi* $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$

In questa formula ritroviamo quella a noi nota per la determinazione delle radici di un'equazione di secondo grado; osserviamo che in questo modo si trovano solo le radici positive: quelle negative non erano prese in considerazione.
A questa regola al-Khwarizmi, probabilmente influenzato dalla cultura greca, fa seguire la dimostrazione geometrica della formula che, per la precedente equazione funziona così (osserva la figura):



- si suppone che il segmento *AB* rappresenti il valore dell'incognita (x)
- si costruisce il quadrato di lato *AB*
- si prolunga *AB* del segmento *AH* uguale alla metà del numero delle radici (5)
- si completa il quadrato di lato *BH*.

Le aree delle tre parti in colore in cui il quadrato di lato *BH* viene diviso sono rispettivamente: x^2, $5x$, $5x$ e la loro somma è il primo membro dell'equazione: $x^2 + 10x$.
Se adesso ai due membri sommiamo l'area della parte chiara, che è uguale a 25, scopriamo che l'area dell'intero quadrato è 64 :

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \quad \rightarrow \quad (x+5)^2 = 64$$

Il lato del quadrato deve quindi essere uguale a 8 e perciò x deve essere uguale a 3.
Riconosciamo in questa procedura il metodo del completamento del quadrato che abbiamo introdotto nel capitolo sulle equazioni di secondo grado per ricavare la formula risolutiva.