## I frattali

Nella geometria classica da noi studiata siamo portati a dire che le rette hanno una dimensione, le superfici ne hanno due e i corpi solidi ne hanno tre. Diciamo poi che anche una curva ha una sola dimensione perché, mediante il processo di rettificazione, possiamo sempre ridurla ad una retta o ad una sua parte.
Ma è sempre così? Qualunque linea si può rettificare ed ha quindi dimensione uno? Per dare una riposta a questa domanda consideriamo la linea che costruiamo in questo modo.
Prendiamo un quadrato, dividiamolo in nove parti uguali e costruiamo una spezzata come in figura 1a; otteniamo così una prima approssimazione della curva che vogliamo costruire. Dividiamo poi ciascuno dei nove quadratini precedenti in altre nove parti e, in ognuno di essi, sostituiamo la linea disegnata con una spezzata della stessa forma di quella della prima approssimazione (***figura 1b***). Procedendo con lo stesso metodo otteniamo curve di lunghezza sempre maggiore, perché ogni tratto di linea viene sostituito con uno di lunghezza maggiore nell'approssimazione successiva (***figura 1c***). Se il numero delle approssimazioni cresce sempre più e tende all'infinito, la lunghezza della linea ottenuta diventa infinita e arriva a riempire tutto il quadrato di partenza.
Questa curva, riempiendo un quadrato, ha allora dimensione due e non può quindi essere rettificata. Essa viene detta **curva di Peano** (Giuseppe Peano, 1858-1932). Esistono quindi linee che hanno due dimensioni.
Ma, siamo tentati di dire, se questo ha senso dal punto di vista teorico, che riscontro hanno nella realtà linee di questo tipo? Per rispondere a questa domanda poniamo un altro quesito.
*"Quanto è lunga la linea costiera della Gran Bretagna?"*
Con questo titolo comparve nel 1967 sulla rivista Science un articolo di Benoit Mandelbrot, un brillante matematico francese che lavorava in un centro di ricerca dell'IBM nello stato di New York. Il titolo, di per sé innocuo e apparentemente di scarso valore scientifico, suscitò invece grande interesse per le implicazioni che comportava.
Le considerazioni di Mandelbrot, che cercheremo di esporre fra breve nel modo più semplice possibile, diedero luogo ad una serie di studi su curve e superfici particolari che sono in grado di rappresentare molti fenomeni fisici e biologici.
La **teoria dei frattali**, così è stata chiamata la teoria nata da questi studi, ha potuto svilupparsi anche grazie alla potenza dei moderni computer e può per questo ben ritenersi "figlia" dell'era dei calcolatori. Oggi le superfici frattali, di cui puoi vedere un esempio in ***figura 2*** di pagina seguente, vengono studiate negli ambienti universitari e trovano applicazioni nei campi più svariati: da quello delle arti grafiche per produrre immagini, a quello cinematografico per produrre effetti speciali soprattutto per i film di fantascienza.
Ma vediamo da che ragionamento era partito Mandelbrot nel suo articolo. Se vogliamo misurare quanto è lunga la costa della Gran Bretagna, non potendola "tirare" in modo da renderla rettilinea, dobbiamo usare qualche artificio. Per esempio prendere un aereo e, mantenendo costante la quota, scattare tante fotogra-

***Figura 1***

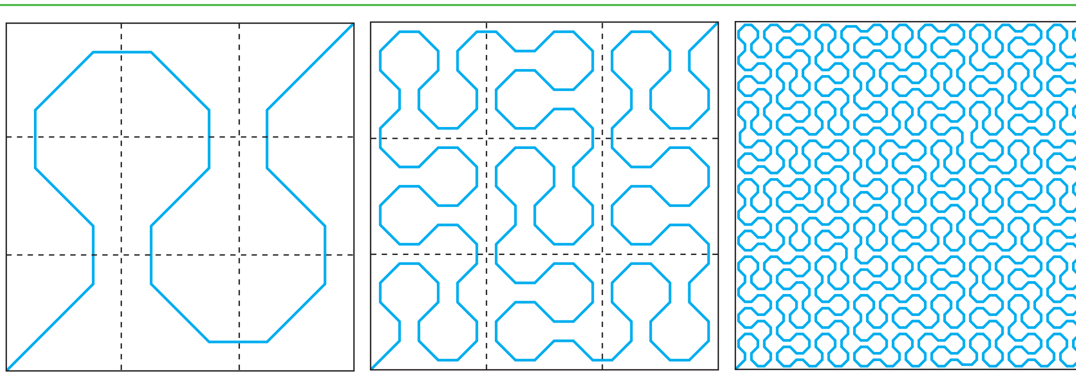
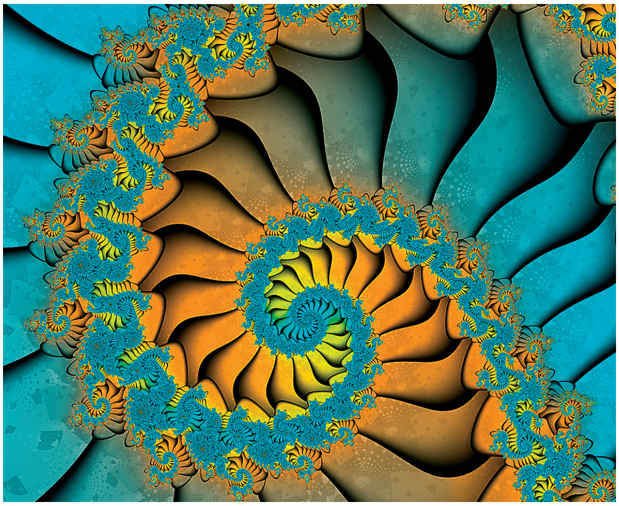


*Figura 2*

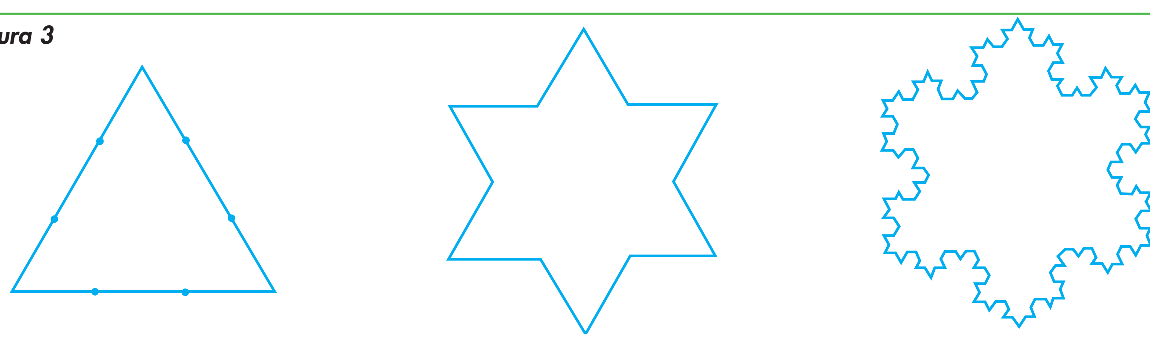


fie che, accostate, ci consentano di misurare la linea costiera. Il valore trovato non è però molto preciso; si può allora trovare un valore migliore volando ad una quota più bassa e scattando molte più fotografie. Se poi decidiamo di percorrere a piedi la costa, possiamo usare un bastone di lunghezza fissata, per esempio un metro, appoggiarlo in un punto $A$ (punto iniziale della misurazione) e ruotarlo attorno ad $A$ fino a che l'altro estremo tocca un punto $B$ della costa; segnata la posizione di $B$, riportiamo il primo estremo del bastone in $B$ e tocchiamo con l'altro estremo un terzo punto $C$. Supponendo di avere la pazienza di ripetere questa procedura fino a descrivere l'intero percorso, abbiamo trovato una misura sicuramente più precisa della linea costiera. Se poi il nostro bastone fosse uno spago lungo 10 centimetri, troveremmo un valore ancora più preciso.
In sostanza, la lunghezza trovata con questi procedimenti dipende dal passo scelto: più il passo $p$ è piccolo, più il valore trovato $L$ è preciso. Se nella mente di un uomo comune ci si può fermare ad un bastone della lunghezza di un metro, per un fisico $p$ può scendere alle dimensioni atomiche; ma per un matematico il processo di suddivisione di un segmento non ha termine e quindi $p$ può diventare sempre più piccolo.
Ci sono poi situazioni reali in cui il processo di misurazione di una linea porta a trovare valori di $L$ che aumentano sempre al diminuire di $p$ senza dare segni di avvicinarsi ad un valore preciso; e questo significa che tali linee hanno lunghezza infinita pur racchiudendo una superficie limitata.
E' il caso della curva di Koch, (Helge von Koch, 1870-1924) che viene così costruita. Consideriamo un triangolo equilatero e dividiamo ciascuno dei suoi lati in tre parti congruenti (***figura 3a***); sul segmento centrale di ogni lato costruiamo, esternamente ad esso, un altro triangolo equilatero cancellando poi il segmento centrale (***figura 3b***). Lavoriamo adesso allo stesso modo su ognuno dei triangoli equilateri più piccoli; iterando il procedimento otteniamo una curva sempre più elaborata (***figura 3c***) e, poiché il processo di suddivisione di un segmento non ha termine, anche in questo caso il numero di iterazioni è infinito.
Cerchiamo di capire che cosa succede alla lunghezza di questa linea; se indichiamo con $a$ il lato del triangolo iniziale, il suo perimetro è $3a$; alla prima iterazione ciascun nuovo "lato" diventa $\frac{4}{3}a$, cioè aumenta di $\frac{1}{3}a$.
L'aumento si verifica ad ogni nuova iterazione per cui, anche in questo caso, troviamo una linea di lunghezza infinita che tuttavia racchiude una superficie limitata.
Osserviamo che, fino a quando ci manteniamo in un numero finito di iterazioni, il problema della lunghezza infinita non si pone perché si arriva comunque a determinare una lunghezza precisa; per esempio, dopo 100 iterazioni, $L$ vale

$$3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{100} \approx 9{,}35 \cdot 10^{12} a$$

e si può dire che la linea ottenuta è rettificabile ed ha dimensione uno. Il problema nasce quando il numero di iterazioni diventa infinito e si raggiunge la curva li-

*Figura 3*



mite, perché non ci troviamo più in un ambiente conosciuto dalla nostra esperienza. Non ha più senso quindi parlare di "dimensione" con la concezione che abbiamo usualmente di questo termine.
I matematici hanno introdotto allora un nuovo concetto di *dimensione* che prevede che ne possano esistere anche di frazionarie; con questa nuova concezione, che non spieghiamo in questa sede perché comporta conoscenze matematiche più elevate, la curva di Koch ha dimensione pari a circa 1,2618 con una approssimazione di quattro cifre decimali.
Le figure con dimensione frazionaria sono state chiamate **frattali** da Mandelbrot nel 1987 con la pubblicazione del libro *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione* dove egli dimostra come molti fenomeni fisici e biologici diano origine a figure di questo tipo.
Oggi gli studi sulla geometria frattale tentano di descrivere le forme della Natura e di studiare i comportamenti dei più svariati fenomeni come per esempio lo sviluppo dei cicloni. In biologia, fra le altre cose, la teoria frattale è applicata allo studio dei tumori; pare infatti, e recenti studi lo dimostrerebbero, che i vasi sanguigni che nutrono le cellule tumorali abbiano uno sviluppo che può essere misurato con l'applicazione della geometria frattale. Impedire il nutrimento di tali cellule potrebbe voler dire sconfiggere la malattia.
Anche il mondo del teatro si interessa ai frattali; da un progetto della *Bottega dell'Attore-Autore di Campoteatrale* nasce **(è)stran(è)a** un lavoro di Lilli Fragneto che l'autrice-attrice porta in giro per le scuole con molto successo. Lo spettacolo inizia con queste parole:
*Stamattina assisterete ad una lezione di matematica, o meglio, ad una lezione di geometria. Vedremo insieme che è possibile misurare il mondo, fare geometria,*

*usando forme diverse dalle rette, quadrati, cerchi... da quelle forme ereditate dalla geometria euclidea. Esiste una nuova geometria che fa uso di forme che si trovano in natura... è la geometria frattale, è una teoria che non crea modelli o griglie, ma semplicemente descrive il mondo intorno a noi, e lo traduce in matematica tenendo conto degli infiniti particolari.*
La protagonista descrive come fino da bambina la sua passione fosse rivolta ai cavoli piuttosto che alle bambole, perché i cavoli sono delle fantastiche figure frattali della natura (in ***figura 4*** l'*albero di Pitagora* che somiglia proprio a un ciuffo di cavolfiore).

***Figura 4***