Le operazioni e le proprietà

Quando si parla di operazioni, ci si riferisce abitualmente a quelle fra numeri (come l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione). Tuttavia il concetto di operazione ha un significato più generale (abbiamo studiato ad esempio l'unione di due insiemi). Ma allora che cos'è un'operazione? Definire il significato di operazione fra due oggetti, siano essi numeri, lettere o insiemi, significa formulare una legge che consenta di determinare, in dipendenza da elementi ed in modo unico, un terzo elemento appartenente anch'esso agli elementi dell'insieme. Ad esempio, il risultato dell'intersezione di due insiemi è ancora un insieme la cui composizione dipende dai due insiemi dati; la somma di due numeri naturali è ancora un numero naturale che dipende dai due numeri dati. In generale possiamo dire:

DEFINIZIONE. Si chiama **operazione binaria** in un insieme A, non vuoto, una legge che ad ogni coppia di elementi a e b di A associa un terzo elemento c che appartiene ad A. In simboli si scrive $a * b = c$ e si legge: «a composto b uguale c»; il simbolo $*$ è quello dell'operazione, a e b sono i termini dell'operazione e c è il risultato.

La scrittura di un'espressione letterale permette di generalizzare le principali proprietà delle operazioni studiate nei numeri e negli insiemi.

Alla luce di quanto abbiamo detto enunciamo le più importanti proprietà studiate fino a questo punto.

PROPRIETÀ COMMUTATIVA. Si dice che un'operazione $*$, definita in un insieme A, è **commutativa** se per ogni coppia a e $b \in A$ si ha che $a * b = b * a$.

In pratica se un'operazione è commutativa non ha importanza l'ordine in cui sono presi i due termini.

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA. Si dice che un'operazione $*$, definita in un insieme A, è **associativa** se per ogni terna a, b, $c \in A$ si ha che $(a * b) * c = a * (b * c)$.

In pratica se un'operazione è associativa non ha importanza la sequenza con cui si eseguono le operazioni parziali.

In un insieme è possibile definire più di una operazione. Per esempio nell'insieme N possiamo stabilire l'operazione di addizione, moltiplicazione e così via. Consideriamo allora un insieme A in cui sono definite due operazioni $*$ e $\square$; possiamo enunciare la seguente:

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA. Si dice che in A vale la **proprietà distributiva** dell'operazione $*$ rispetto all'operazione $\square$ se per ogni a, b, $c \in A$ si ha che: $a * (b \square c) = (a * b) \square (a * c)$.

Elemento neutro

Quando si esegue un'operazione fra due elementi a e b di un insieme, in generale, il risultato dipende sia da a che da b. Ci sono casi però in cui uno dei due elementi non ha alcuna influenza sul risultato dell'operazione. Per esempio, sappiamo che un qualsiasi numero moltiplicato per 1 dà come risultato il numero stesso, pertanto:

DEFINIZIONE. Diciamo che un'operazione $*$ definita in un insieme A possiede **l'elemento neutro** n se per ogni elemento $a \in A$ si ha: $a * n = n * a = a$.

Elemento inverso (o simmetrico)

Il fatto che un'operazione definita in un insieme possieda l'elemento neutro è molto importante in quanto ci consente di parlare di elemento inverso, pertanto:

DEFINIZIONE. Chiamiamo **inverso** di un elemento $a \in A$, l'elemento $b \in A$, tale che $a * b = b * a = n$.

Le proprietà delle quattro operazioni fondamentali

Rivediamo in forma sintetica come queste proprietà si applicano alle quattro operazioni fondamentali.

Proprietà commutativa

- **dell'addizione:** la somma di due o più addendi non cambia se si cambia in un qualsiasi modo l'ordine degli addendi; in simboli: $a + b = b + a$;
- **della moltiplicazione:** il prodotto di due o più fattori non cambia se si cambia in un qualsiasi modo l'ordine dei fattori; in simboli: $a \cdot b = b \cdot a$.

Proprietà associativa

- **dell'addizione:** la somma di più addendi non cambia se a due (o più) di essi sostituiamo la loro somma; in simboli: $a + b + c = a + (b + c)$;
- **della moltiplicazione:** il prodotto di più fattori non cambia se a due (o più) di essi sostituiamo il loro prodotto; in simboli: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Proprietà dissociativa

- **dell'addizione:** la somma di più addendi non cambia se ad uno di essi ne sostituiamo altri due (o più) tali che sommati diano quell'addendo;
  in simboli: $a + b = a + (c + d) = a + c + d$ con $b = c + d$;
- **della moltiplicazione:** il prodotto di più fattori non cambia se ad uno di essi ne sostituiamo altri due (o più) tali che moltiplicati diano quel fattore;
  in simboli: $a \cdot b = a \cdot (c \cdot d) = a \cdot c \cdot d$ con $b = c \cdot d$.

Proprietà invariantiva

- **della sottrazione:** la differenza di due numeri non cambia se a ciascuno di essi si addiziona o si sottrae, se ciò è possibile, uno stesso numero;
  in simboli: $a - b = (a + c) - (b + c)$ oppure $a - b = (a - d) - (b - d)$;
- **della divisione:** il quoziente di due numeri rimane invariato moltiplicando o dividendo, se è possibile, per uno stesso numero diverso da zero il dividendo e il divisore;
  in simboli: $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ oppure $a : b = (a : d) : (b : d)$.

Proprietà distributiva

- **della moltiplicazione rispetto all'addizione:** per moltiplicare un numero per un'addizione, si può moltiplicare ciascun termine dell'addizione per quel numero e poi addizionare i prodotti ottenuti;
  in simboli: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- **della moltiplicazione rispetto alla sottrazione:** per moltiplicare un numero per una sottrazione, si può moltiplicare ciascun termine della sottrazione per quel numero e poi sottrarre i prodotti ottenuti;
  in simboli: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$;
- **della divisione rispetto all'addizione**: per dividere un'addizione per un numero, si può dividere, se è possibile, ciascun termine dell'addizione per quel numero e poi addizionare i quozienti ottenuti;
  in simboli: $(b + c) : a = b : a + c : a$;
- **della divisione rispetto alla sottrazione:** per dividere una sottrazione per un numero, si può dividere, se è possibile, ciascun termine della sottrazione per quel numero e poi sottrarre i quozienti ottenuti;
  in simboli: $(b - c) : a = b : a - c : a$.