Concetti chiave e regole

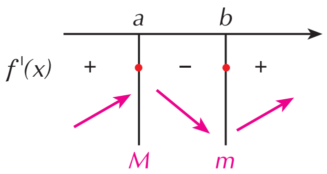
Massimi e minimi relativi

Considerata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$:

- un punto $x_0 \in [a, b]$ è un **punto di minimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più piccolo che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \geq f(x_0)$; in questo caso $f(x_0)$ è il minimo relativo della funzione;
- un punto $x_0 \in [a, b]$ è un **punto di massimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più grande che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \leq f(x_0)$; in questo caso $f(x_0)$ è il massimo relativo della funzione.

Criteri di individuazione

La derivata prima di una funzione rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva; essa ci consente di conoscere quando una funzione è crescente (derivata positiva) e quando è decrescente (derivata negativa) ed inoltre ci è utile per calcolare i punti di massimo e di minimo relativi delle funzioni. In particolare, per individuare i punti estremanti si deve:



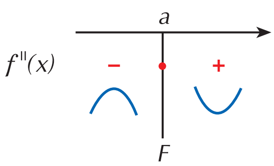
- trovare i punti che annullano la derivata prima o quelli in cui essa non esiste
- studiare il segno della derivata prima
- dedurre da esso quali punti sono di massimo o di minimo relativo.

Massimi e minimi assoluti

I **punti di massimo o di minimo assoluti** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ sono i punti in cui la funzione assume il valore più grande o il valore più piccolo rispetto a tutti gli altri punti dell'intervallo; essi, se esistono, vanno ricercati fra i massimi o i minimi relativi, oppure fra i valori assunti dalla funzione negli estremi dell'intervallo considerato.

Concavità e flessi

La derivata seconda di una funzione rappresenta la concavità della curva: se è negativa la concavità è rivolta verso il basso, se è positiva è rivolta verso l'alto. I punti di flesso sono i punti in cui cambia la concavità della curva; per individuarli si deve:



- trovare i punti che annullano la derivata seconda o quelli in cui essa non esiste
- studiare il segno della derivata seconda
- dedurre da esso quali punti rappresentano dei flessi.

Massimi, minimi e flessi con le derivate successive

Per trovare i punti di massimo e di minimo relativo e i punti di flesso di una funzione $f(x)$, in alternativa ai metodi precedenti e se esistono le derivate successive di $f(x)$ fino a quella di ordine n, si può seguire questa procedura:

- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata prima e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\rightarrow$ x_0 è un punto di minimo
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\rightarrow$ x_0 è un punto di massimo
  - se n è dispari $\rightarrow$ x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale
- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata seconda e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è dispari $\rightarrow$ x_0 è un punto di flesso
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\rightarrow$ in x_0 la funzione è concava verso l'alto
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\rightarrow$ in x_0 la funzione è concava verso il basso.

I metodi di risoluzione approssimata di un'equazione

Una volta accertato che in $(a,\ b)$ l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale r, per trovare un suo valore approssimato si possono seguire diversi metodi.

Metodo di bisezione

- si divide $(a,\ b)$ in due parti uguali considerando il punto medio $\dfrac{a+b}{2}$
- si calcola $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
- se $f(a) \cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, allora la soluzione r appartiene all'intervallo $\left(a,\ \dfrac{a+b}{2}\right)$, altrimenti appartiene all'intervallo $\left(\dfrac{a+b}{2},\ b\right)$

Si ripete il procedimento sul nuovo intervallo fino ad ottenere la precisione desiderata.