

SCHEDA DI APPROFONDIMENTO

Tanti modi per risolvere un problema

Quando per la risoluzione di alcuni problemi non è possibile utilizzare uno dei metodi analizzati nel testo base, si ricorre all'uso di particolari accorgimenti per mezzo dei quali sia possibile interpretare il problema e mettere quindi in atto la relativa strategia risolutiva. In questo approfondimento sono descritti diversi modi di risolvere lo stesso problema. Si tratta di modi a volte un po' curiosi, e persino divertenti, che possono farti capire come la matematica non sia una disciplina assolutamente "rigida".

Al contrario, l'intuizione e la fantasia, sebbene sempre sostenute da una rigorosa conoscenza della materia, possono risultarvi molto utili. Scoprirai così che spesso esistono molte vie per giungere a una stessa soluzione. La scelta dipende da te.

Testo del problema

In una fattoria ci sono alcune pecore e alcune galline. In tutto questi animali hanno 30 teste e 98 zampe. Quante sono le pecore e quante le galline?

La risoluzione per tentativi casuali

Una prima soluzione possibile è quella per tentativi casuali.

Consiste nel fare tutte le ipotesi possibili. Ad esempio, che ci sia una pecora e 29 galline, oppure 2 pecore e 28 galline, oppure 3 pecore e 27 galline, e così via fino a 29 pecore e una gallina. In ciascuno di questi casi moltiplichiamo per 4 il numero delle pecore e per 2 quello delle galline sommiamo questi due risultati e controlliamo se la somma è uguale a 98 oppure no. Se lo è, il numero di pecore e di galline che abbiamo supposto, è quello giusto. Questo metodo può funzionare, ma richiede una grande quantità di tempo, perché obbliga ad effettuare tanti tentativi. Se il numero totale di animali fosse molto più grande, sarebbe pressoché impossibile utilizzarlo.

La risoluzione per tentativi "ragionati"

Un secondo metodo è quello di procedere sempre per tentativi, ma in modo più furbo. Ad esempio, possiamo cominciare a supporre che ci siano 4 pecore e 26 galline.

Allora il numero delle zampe sarebbe $4 \cdot 4 + 26 \cdot 2 = 16 + 52 = 68$. Sono troppo poche: ce ne vorrebbero 30 in più per arrivare a 98. Se supponiamo che ci siano 26 pecore e 4 galline, il numero di zampe sarebbe $4 \cdot 26 + 2 \cdot 4 = 104 + 8 = 112$. Queste sono troppe: sono 14 in più di 98. Vediamo, però, che siamo più vicini di prima al numero di 98 zampe stabilito dal problema.

Questo significa che ci sono più pecore che galline, ma che sono meno di 26. Proviamo a diminuire il numero di pecore da 26 a 20. Allora il numero di zampe sarà: $4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80 + 20 = 100$. Ce ne sono solo due di troppo! Ma sostituendo una pecora con una gallina, il numero diminuisce di 2 e ci siamo. Infatti, con 19 pecore e 11 galline, abbiamo un numero di zampe di

$$4 \cdot 19 + 2 \cdot 11 = 76 + 22 = 98$$

Abbiamo raggiunto il risultato con quattro prove soltanto.

La risoluzione "intuitiva"

L'osservazione fatta a proposito del secondo metodo "sostituire una pecora con una gallina fa calare di 2 il numero di zampe" ci suggerisce un metodo ancora più veloce.

Cominciamo col supporre che i 30 animali siano tutte galline. Allora il numero totale di zampe sarebbe uguale a $2 \cdot 30 = 60$. Ora ne mancano 38 per averne 98. Ma queste 38 rappresentano le paia di zampe di tutte le pecore che dobbiamo sostituire alle galline.

Dato che ogni pecora contribuisce con un paio di zampe, il numero di pecore è uguale a 38 diviso 2, cioè proprio a 19.

Ragionando meglio siamo giunti al risultato con un tentativo solo.

La risoluzione "algebrica"

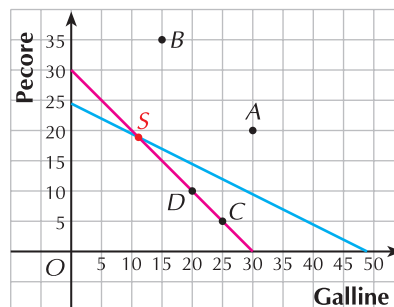
Il quarto modo di risolvere il problema è basato interamente sul ragionamento, come il terzo. E' più complicato, ma è interessante perché mostra come l'algebra, una branca della matematica che studierai nel terzo anno di corso, possa essere utile per risolvere i problemi. Schematizziamo questo metodo precisandone per punti i passaggi.

- A.** La somma del numero di pecore (chiamato p) e del numero di galline (chiamato g) è uguale a 30.
Cioè: $p + g = 30$.
- B.** Il numero di pecore (p) moltiplicato 4, più il numero di galline (g) moltiplicato 2 è uguale a 98.
Cioè: $4p + 2g = 98$.
- C.** (dedotta dalla **B**) Il numero di galline moltiplicato 2 è uguale a 98 meno il numero delle pecore moltiplicato 4.
Cioè: $2g = 98 - 4p$.
- D.** (dedotta dalla **A**) La somma del doppio del numero delle pecore e del doppio del numero delle galline è uguale a 60.
Cioè: $2p + 2g = 60$.
- E.** (dedotta dalla **D**) Il numero di galline moltiplicato 2 è uguale a 60 meno il numero delle pecore moltiplicato per 2.
Cioè: $2g = 60 - 2p$.
- F.** Dal confronto della **C** e della **E** deduciamo che il doppio numero delle galline è uguale sia a 98 meno 4 volte il numero delle pecore, sia a 60 meno due volte il numero delle pecore.
Cioè: $98 - 4p = 60 - 2p$.
- G.** La differenza fra i numeri da cui sottraggo il numero delle pecore moltiplicato per 4 oppure per 2 è $38 = 98 - 60$. Perché l'uguaglianza della **F** sia soddisfatta questa differenza deve essere uguale alla differenza fra le quantità che sottraggo, cioè a 2 volte il numero delle pecore.
Cioè: $98 - 60 = 2p$.
- H.** Se 2 volte il numero delle pecore è uguale 38, allora il numero delle pecore deve essere uguale a 19 e quello delle galline a 11.
Cioè: $38 = 2p$
 $p = 38 : 2 = 19$
 $g = 11$

La risoluzione cartesiana

Un quinto modo per risolvere il problema utilizza il grafico cartesiano; il principio è semplice, tracciamo due linee, una orizzontale e una verticale. Lungo la linea verticale segneremo i numeri di pecore o i numeri di zampe di pecore. Lungo la linea orizzontale segneremo i numeri di galline o i numeri di zampe di galline. Quindi ogni punto rappresenterà un numero di pecore e un numero di galline. Il punto **A** che sta al trentesimo posto in orizzontale e al ventesimo posto in verticale, rappresenta 30 galline e 20 pecore. Il punto **B** (al quindicesimo posto in orizzontale e al trentacinquesimo posto in verticale) rappresenta 15 galline e 35 pecore.

Ora, la somma dei numeri di pecore e galline deve essere 30. Ci accorgiamo subito che tutti i punti che possono rappresentare una somma giusta di pecore e galline si trovano sul segmento rosso che congiunge il punto (30; 0) (30 galline e 0 pecore) con il punto (0; 30) (0 galline e 30 pecore). Si tratta di tutte le possibili ipotesi considerate a proposito della soluzione per tentativi casuali ((30; 0) - (29; 1) - (28; 2) - (27; 3) e così via). Su questo segmento il punto **C** rappresenta una situazione con 25 galline e 5 pecore. Il punto **D** una situazione con 20 galline e 10 pecore.



Poi possiamo tracciare un altro segmento (in azzurro) con i numeri delle zampe. Questo partirà da un punto sull'asse verticale delle pecore corrispondente al numero totale di zampe diviso 4 (zampe per pecora), cioè a $\frac{98}{4} = 24,5$.

L'altro punto del segmento corrisponde alla situazione "tutte zampe di gallina": lo troviamo sull'asse orizzontale al valore $\frac{98}{2} = 49$.

Ora il punto rappresentativo della situazione si deve trovare sia sul primo segmento, sia sul secondo: quindi sarà sull'incrocio delle due linee colorate. Si tratta del punto **S** che corrisponde, appunto, a 11 galline e 19 pecore.

Una risoluzione semiseria

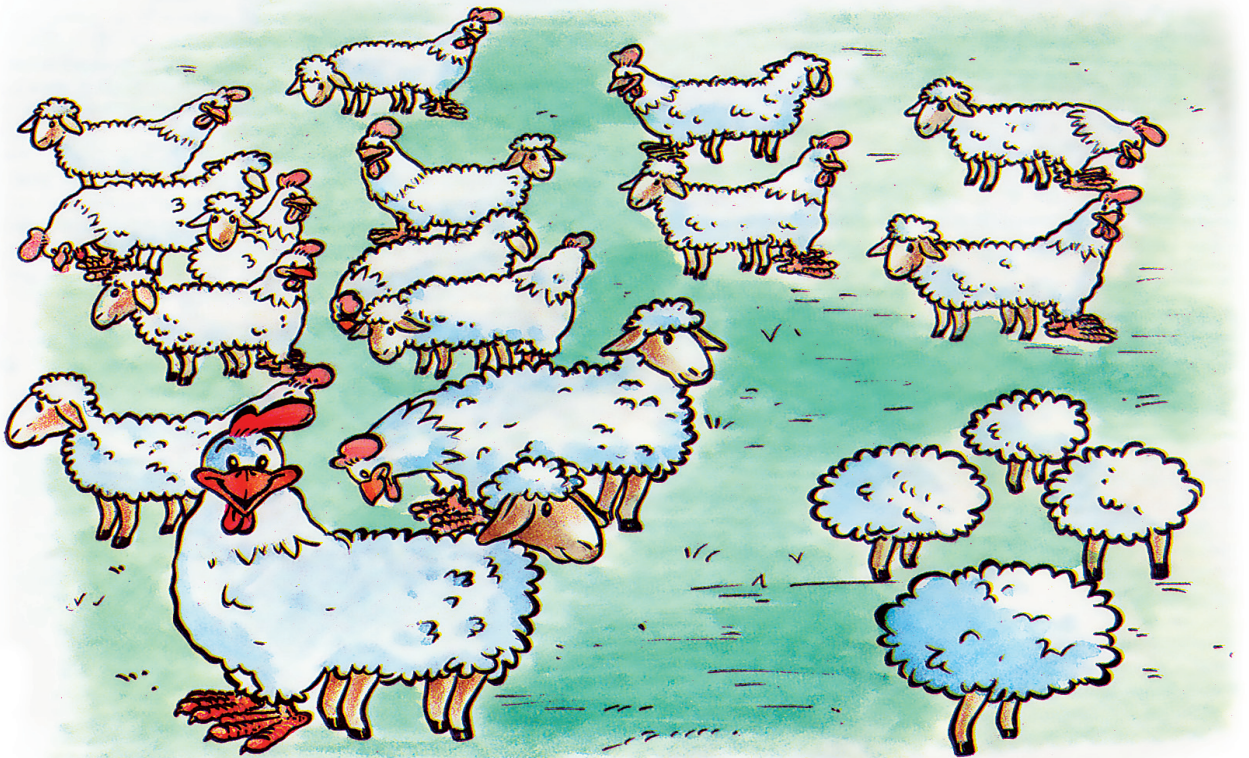
Siccome non si può sempre essere seri, e ogni tanto si deve pur sorridere, si può giocare con la fantasia per alleggerire la fatica, trovando la soluzione esatta.

Siccome 98 zampe sono molte, e contarle a 2 o a 4 alla volta è lungo, inventiamo un animale che si chiama "pecorallina", che è una somma di una pecora e una gallina. Questo animale possiede dunque 2 teste e 6 zampe. Quante pecoralline abbiamo nella fattoria? Se le 30 teste appartengono alle pecoralline ne abbiamo quindi 15 (30 : 2).

Questi animali hanno $6 \cdot 15 = 90$ zampe. Avanzano dunque 8 zampe. Possiamo perciò immaginare un altro animale, la "pecora sgallinata", che è una pecora da cui abbiamo tolto una gallina.

Questo animale ha zero teste (una della pecora meno una della gallina), e due zampe (4 della pecora meno due della gallina). Le 8 zampe dunque appartengono a 4 di queste pecore sgallinate. Ora voi direte che 15 e 4 non sono i numeri che cerchiamo. Abbiate pazienza solo ancora poche righe. Le 15 pecoralline equivalgono a 15 pecore e 15 galline. Le 4 pecore sgallinate equivalgono a 4 pecore e a togliere 4 galline. Dunque le pecore saranno $15 + 4 = 19$, mentre le galline saranno $15 - 4 = 11$.

Non sempre bastano le pecoralline e le pecore sgallinate, ma non è un problema per voi inventare, quando servono, le bipecore trisgallinate o le bigalline specorate, o qualunque altro orrore formale simile (che farebbe inorridire i "matematici").



I seguenti problemi si risolvono applicando un procedimento che dovrai talvolta "inventare" in quanto non sempre è possibile utilizzare i metodi proposti nel capitolo; svolgili quindi con l'aiuto dell'insegnante.

- 1** Tre ragazzi possiedono rispettivamente 120, 115, 95 figurine. Quante figurine devono cedere rispettivamente il primo ed il secondo al terzo ragazzo per averne lo stesso numero? [10; 5]
- 2** Fai la somma di sette numeri consecutivi scelti a caso e confrontala con un valore uguale a 7 volte il valore intermedio. Che cosa osservi?
- 3** Somma tra loro 6 numeri consecutivi. Ora triplica la somma tra il primo e l'ultimo. Che cosa osservi? Che rapporto esiste fra i due risultati se i numeri consecutivi sono 8?
- 4** Paolo chiede a Stefano quante figurine possiede e Stefano risponde: «Non lo so esattamente, ma so che se le conto a due a due me ne avanza una, e così anche se le conto a tre, a quattro, a cinque o a sei. Contandole a sette alla volta sono giuste». Paolo riflette un attimo e risponde esattamente. Sai fare lo stesso?
- 5** Scrivi un numero di tre cifre diverse, come ad esempio 548. Scrivi il numero che si ottiene invertendo la prima e la terza cifra: 845. Calcola la differenza tra il numero maggiore ed il minore: 297. Scrivi il numero che si ottiene invertendo la prima e la terza cifra: 792. Somma questi ultimi due numeri: 1089. Prova a ripetere lo stesso procedimento con altri numeri scelti da te. Che numero ottieni?
- 6** Ci sono quattro monete: tre sono uguali e una ha un peso leggermente diverso. Con una bilancia a piatti devi identificare la moneta diversa con due pesate. Come fai?
- 7** Scrivi un numero di 4 cifre consecutive decrescenti (dal più grande al più piccolo), per esempio 6543. Scrivi il numero che si ottiene invertendo le cifre: 3456. Calcola la differenza tra i due numeri: 3087. Adesso prova tu con altri numeri di quattro cifre decrescenti. Che numero ottieni? Perché?
- 8** Su uno scaffale è collocata una enciclopedia di 14 volumi di 250 pagine ciascuno. Un tarlo inizia a mangiare dalla prima pagina del primo volume e va fino all'ultima pagina dell'ultimo volume. Quante pagine e quante copertine buca? [3 500 pagine; 26 copertine]
- 9** Un fruttivendolo per l'acquisto di 50 kg di arance e 60 kg di mele spende in tutto € 222; se avesse acquistato 60 kg di arance e 50 kg di mele avrebbe speso complessivamente € 218. Calcola il costo al chilogrammo di arance e mele. [€ 1,80; € 2,20]
- 10** Paolo ha tre scatole di biglie; la prima ne contiene 92, la seconda 104 e la terza 108. Acquista altre 56 biglie che vorrebbe distribuire nelle 3 scatole facendo in modo che ciascuna scatola abbia lo stesso numero di biglie. Quali operazioni deve eseguire Paolo? [aggiunge 28 biglie alla prima scatola, 16 alla seconda e 12 alla terza]
- 11** All'apertura del salvadanaio di Claudio si possono contare 184 monete, rispettivamente da € 0,20, € 0,50 e da € 1 per un totale di € 100,90. Qual è il numero di monete per ciascun valore? [67 da € 1; 35 da € 0,50; 82 da € 0,20]