Approfondimento

Confronto tra infinitesimi e tra infiniti

Nel confronto tra due funzioni è a volte importante sapere quale tende a zero oppure a infinito più in fretta. Per esempio, una persona che deve scegliere tra due forme di investimento, ciascuna delle quali ha un rischio, vorrà sapere quale delle due ha un rischio che tende a zero più rapidamente; analogamente un'azienda chimica che ha progettato un nuovo prodotto antibatterico, sarà interessata a conoscere se il suo prodotto fa tendere a zero la crescita dei batteri più in fretta del prodotto di un concorrente.
Analizzando funzioni che rappresentano guadagni o indici di successo di un fenomeno, è invece importante conoscere quale tende all'infinito in modo più rapido.
Diamo quindi le seguenti definizioni.

Si dice che una funzione $f(x)$ è:

- un **infinitesimo** per $x \to c$ se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$
- un **infinito** per $x \to c$ se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$

Esempi.

Sono infinitesime le seguenti funzioni:

$f(x) = x^2$	per $x \to 0$	infatti $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$
$f(x) = \dfrac{x-2}{x}$	per $x \to 2$	infatti $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x} = 0$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	per $x \to \infty$	infatti $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Sono infinite le seguenti funzioni:

$f(x) = x^3 + 1$	per $x \to +\infty$	infatti $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 1) = +\infty$
$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$	per $x \to 0$	infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2} = +\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$	per $x \to 1$	infatti $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

Gli ordini di infinitesimo

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime per x che tende a c, allora diciamo che:

- $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a $g(x)$ se $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, cioè se $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$;

- $f(x)$ è un **infinitesimo dello stesso ordine** rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ con $\ell \in R - \{0\}$, cioè se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la stessa rapidità;
- $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, cioè se $f(x)$ tende a zero meno rapidamente di $g(x)$;
- $f(x)$ **non è confrontabile** con $g(x)$ se non esiste $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$; in questo caso non è possibile dire quale delle due funzioni converga a zero in modo più rapido.

Esempi.

1. Le funzioni di equazione $y = 1 - \cos x$ e $y = x$ sono entrambe infinitesime per $x \to 0$ in quanto i loro limiti sono uguali a zero; poiché $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, possiamo dire che la prima funzione è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x.

2. Le funzioni di equazione $y = x^2 - x$ e $y = x(x+1)$ sono infinitesime per $x \to 0$ e poiché $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x(x+1)} = -1$, le due funzioni sono infinitesimi dello stesso ordine.

3. Le due funzioni di equazione $y = x - 3$ e $y = x^2 - 6x + 9$ sono entrambe infinitesime per $x \to 3$ e, essendo $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 6x + 9} = \infty$, possiamo dire che la funzione al denominatore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a quella al numeratore o anche che la funzione al numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a quella al denominatore.

4. Le funzioni di equazione $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ e $y = x^2$ per $x \to 0$ hanno entrambe limite uguale a zero e sono quindi di infinitesimi; tuttavia poiché $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ e quest'ultimo limite non esiste, esse sono infinitesimi non confrontabili.

Gli ordini di infinito

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinite per x che tende a c, allora diciamo che:

- $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$, se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, cioè se $f(x)$ tende all'infinito meno rapidamente di $g(x)$;
- $f(x)$ è un **infinito dello stesso ordine** di $g(x)$, se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, cioè se $f(x)$ tende all'infinito con uguale rapidità di $g(x)$;
- $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** rispetto a $g(x)$, se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, cioè se $f(x)$ tende all'infinito più rapidamente di $g(x)$;
- $f(x)$ **non è confrontabile** con $g(x)$, se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste.

Esempi.

1. Le funzioni di equazioni $y = x^3 + 1$ e $y = x$ sono entrambe infinite per $x \to +\infty$; poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x} = +\infty$ la prima è un infinito di ordine superiore rispetto alla seconda.

2. Le funzioni di equazioni $y = \sqrt{x}$ e $y = x^4 + 1$ sono entrambe infinite per $x \to +\infty$; poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^4+1} = 0$ possiamo concludere che $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $x^4 + 1$.

3. Le funzioni di equazioni $y = \frac{1}{x^2-1}$ e $y = \frac{1}{x+1}$ sono infiniti simultanei per $x \to -1$; poiché $\lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = -\frac{1}{2}$ possiamo concludere che le funzioni sono infiniti dello stesso ordine.

4. Le funzioni di equazioni $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x}$ sono entrambe infinite per $x \to 0$; poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ non esiste, le due funzioni sono infiniti non confrontabili.

La gerarchia degli infiniti

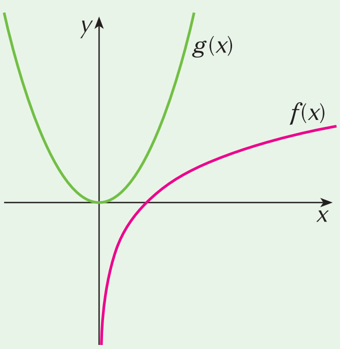
Abbiamo visto che la valutazione di un limite che è il rapporto di due funzioni entrambe infinite può dare luogo a risultati diversi a seconda dell'ordine di infinito delle due funzioni. Spesso però non è semplice valutare quale delle due funzioni tende più rapidamente a infinito; per esempio:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ si presenta nella forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$ e non ci sono limiti notevoli a cui possiamo ricondurre il calcolo.

Possiamo però fare un confronto grafico fra le due curve $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2$ (***figura 1***) dal quale risulta che, quando $x \to +\infty$, la funzione g cresce molto più rapidamente della funzione f; ne consegue che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Figura 1

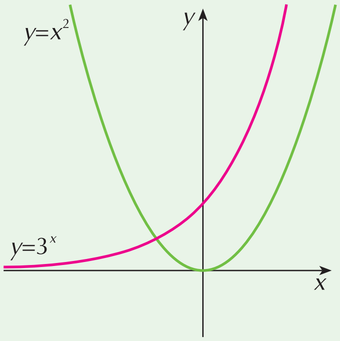


Per facilitare il calcolo di un limite vale quindi la pena di stabilire una sorta di gerarchia fra gli infiniti che, anche se è possibile dimostrare rigorosamente, cercheremo di dedurre da un confronto grafico fra curve. Si verifica che, per $x \to +\infty$:

- $\forall a > 1 \ \wedge \ \forall k > 0$ la funzione a^x è un infinito di ordine superiore alla funzione x^k

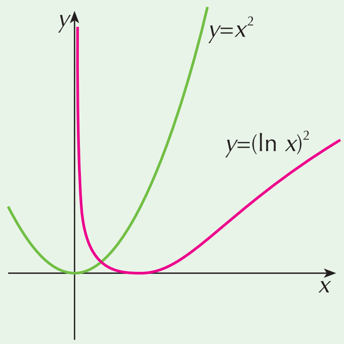
  Infatti il grafico della funzione esponenziale a^x (con $a > 1$) cresce molto più rapidamente di qualsiasi potenza di x (***figura 2***)

Figura 2



- $\forall a > 1 \ \wedge \ \forall h, k > 0$ la funzione x^k è un infinito di ordine superiore alla funzione $(\log_a x)^h$
  Infatti il grafico della funzione potenza x^k cresce molto più rapidamente di qualsiasi potenza di una funzione logaritmica con base maggiore di 1 (***figura 3***).

Figura 3



In definitiva, se vogliamo elencare queste funzioni in senso crescente di ordine di infinito, scriviamo:

$$(\log_a x)^h \quad \to \quad x^k \quad \to \quad a^x \qquad \text{con } a > 1$$

Esempi.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{\ln^3 x} = +\infty$ poiché 2^x è infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di $\ln x$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x}{x^2} = 0$ poiché $\log_2 x$ è infinito di ordine inferiore a x^2

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{3^x} = 0$ poiché x^6 è infinito di ordine inferiore a 3^x

ESERCIZI

1 Indica quali tra le seguenti funzioni sono infinitesime per $x \to 0$:

a. $\dfrac{x-1}{x^2}$ **b.** $\ln x$ **c.** $x\sqrt{x}$ **d.** x^4

2 Indica quali fra le seguenti funzioni sono infinitesime per $x \to 1$:

a. $y = \dfrac{x}{x-1}$ **b.** $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ **c.** $y = \dfrac{\ln x}{x-2}$ **d.** $y = \dfrac{x-1}{2x^2-x-1}$

3 Indica quali tra le seguenti funzioni sono infinite per $x \to 0$:

a. $\dfrac{2}{x}$ **b.** $\ln x$ **c.** e^x **d.** $x^{-\frac{1}{2}}$

4 Indica quali fra le seguenti funzioni sono infinite per $x \to 1$:

a. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ **b.** $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ **c.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **d.** $y = (x-1)(x+4)$

5 Nella gerarchia degli infiniti, quale tra le seguenti funzioni tende più rapidamente a infinito?

a. x^5 **b.** $\log_3 x$ **c.** 3^x **d.** $\sqrt{x}$

6 La funzione $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ è infinitesima:

a. per $x \to 0$ **b.** per $x \to 1$ **c.** per $x \to \infty$ **d.** per $x \to -1$

7 Una sola delle seguenti funzioni non è infinitesima, individuala.

a. $f(x) = \dfrac{1}{2e^x - 1}$ per $x \to +\infty$ **b.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}$ per $x \to \infty$

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin 2x}$ per $x \to 0$ **d.** $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$ per $x \to 0$

8 Verifica che le funzioni di equazione assegnata sono degli infinitesimi per $x \to 0$:

a. $y = x^3 - 2x^2$ **b.** $y = x^2 - 2\sin x$

9 Verifica che le funzioni di equazione assegnata sono degli infiniti per $x \to \infty$:

a. $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ **b.** $y = 5x^2 - 2\cos x$

Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilisci se è un infinito o un infinitesimo per x tendente al valore indicato.

10 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$
a. per $x \to +\infty$ [infinitesimo]
b. per $x \to 0$ [infinito]

11 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
a. per $x \to 0^+$ [infinitesimo]
b. per $x \to +\infty$ [infinitesimo]

12 $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$
a. per $x \to 0$ [infinito]
b. per $x \to +\infty$ [infinitesimo]

13 $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$
a. per $x \to +\infty$ [infinitesimo]
b. per $x \to -\infty$ [infinito]

14 $f(x) = x^3 - 2x$
a. per $x \to 0$ [infinitesimo]
b. per $x \to +\infty$ [infinito]

15 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
a. per $x \to 0$ [infinito]
b. per $x \to +\infty$ [infinito]

16 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$
a. per $x \to 0$ [infinitesimo]
b. per $x \to +\infty$ [infinito]

17 Considerando il limite per $x \to c$, stabilisci per quali valori di c sono infinitesime le seguenti funzioni:

a. $y = (x-3)^3$ **b.** $y = \dfrac{x^2 - 25}{x+1}$ **c.** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

18 Considerando il limite per $x \to c$, stabilisci per quali valori finiti di c sono infinite le seguenti funzioni:

a. $y = \dfrac{x^2 - 25}{x+1}$ **b.** $y = \ln \dfrac{1}{x}$ **c.** $y = \dfrac{\tan x}{x}$

Calcolando il limite del rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *per x che tende al valore indicato, stabilisci qual è l'infinitesimo di ordine maggiore.*

19 $f(x) = x^5 - x$ $g(x) = x^3 + 4x$ per $x \to 0$ [stesso ordine]

20 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$ per $x \to +\infty$ [$g(x)$]

21 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ per $x \to +\infty$ [stesso ordine]

22 $f(x) = e^x - 1$ $g(x) = \sqrt{x}$ per $x \to 0^+$ [$f(x)$]

23 $f(x) = x^4 + 3x^2$ $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x}$ per $x \to 0$ [$f(x)$]

24 $f(x) = x^2 - 4$ $\quad g(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad$ per $x \to 2^+$ $\quad [f(x)]$

25 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-2}$ $\quad$ per $x \to -\infty$ $\quad$ [stesso ordine]

Calcolando il limite del rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ per x che tende al valore indicato, stabilisci qual è l'infinito di ordine maggiore.

26 $f(x) = x^2 + x$ $\quad g(x) = x^3 + 2x$ $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad [g(x)]$

27 $f(x) = x^3 + 2$ $\quad g(x) = x - \sqrt{x}$ $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad [f(x)]$

28 $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\quad g(x) = 2x$ $\quad$ per $x \to -\infty$ $\quad$ [stesso ordine]

29 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ $\quad$ per $x \to -1$ $\quad$ [stesso ordine]

30 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^3-8}$ $\quad$ per $x \to 2$ $\quad [f(x)]$

31 $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^3}$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad [g(x)]$

32 $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$ $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad$ [stesso ordine]

33 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ $\quad$ per $x \to 1$ $\quad$ [stesso ordine]

34 Considerate le funzioni $f(x) = x^n + 2x^2$ e $g(x) = 3x^2 - x$, stabilisci se sono vere o false le seguenti affermazioni per $x \to \infty$:

a. $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$ se $n \geq 2$ V F

b. $g(x)$ è un infinito dello stesso ordine di $f(x)$ solo se $n = 2$ V F

c. $g(x)$ è un infinito di ordine inferiore a $f(x)$ solo se $n < 2$ V F

d. tutte le precedenti affermazioni sono false. V F

Risultati di alcuni esercizi.

1 c., d.	**2** b., c.	**3** a., b., d.	**4** a., c.
5 c.	**6** c.	**7** d.	**17** $3, \pm 5, \pm 2$
18 $-1; 0^+; \dfrac{\pi}{2}$	**34** a. F, b. F, c. F, d. V		