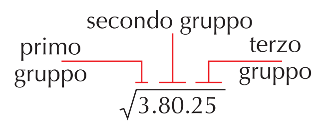
Scheda di approfondimento

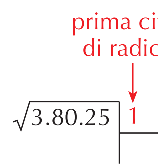
L'algoritmo di estrazione della radice quadrata

Il procedimento di calcolo della radice quadrata, esatta o approssimata, di un numero naturale, è costituito da una sequenza di operazioni matematiche da applicare in modo rigoroso. La relativa dimostrazione è difficile e impegnativa; ci limitiamo pertanto a descrivere le varie fasi di calcolo mediante un esempio. Calcoliamo la radice quadrata di 38025.

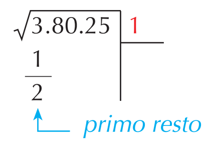
1. Procedendo da destra verso sinistra, suddividiamo con un puntino il numero in gruppi di due cifre. Nel nostro caso il numero delle cifre è dispari e di conseguenza il primo gruppo è formato da una sola cifra.



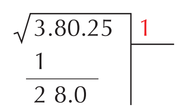
2. Determiniamo mentalmente qual è il numero naturale più grande, che elevato al quadrato non supera il primo gruppo di cifre; calcoliamo, in altre parole, la radice quadrata del primo gruppo, approssimata per difetto all'unità. Nel nostro caso il numero 1 è la prima cifra della radice che stiamo cercando e lo scriviamo a destra del numero di cui vogliamo calcolare la radice quadrata.



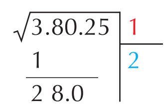
3. Eleviamo al quadrato la prima cifra del risultato (nel nostro caso $1 \cdot 1 = 1$) e la sottraiamo dal primo gruppo di cifre ($3 - 1 = 2$). La differenza così individuata è il primo resto.



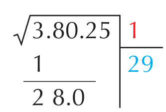
4. Abbassiamo il secondo gruppo di cifre, trascrivendolo accanto al primo resto e separiamo l'ultima cifra a destra del numero ottenuto, con un puntino. Otteniamo così 28.0.



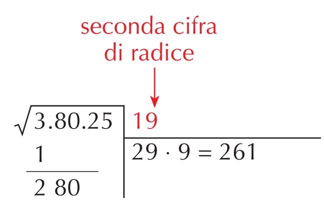
5. Raddoppiamo la prima cifra del risultato finora calcolato ($1 \cdot 2 = 2$) e la trascriviamo sotto l'uno della prima riga orizzontale.



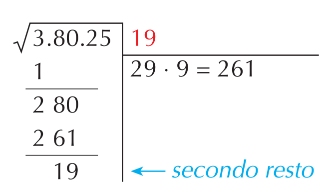
6. Calcoliamo il quoziente, approssimato per difetto, tra 28 e 2 ($28 : 2 = 14$). Siccome il quoziente ottenuto è maggiore di 9, non possiamo accettarlo, e dobbiamo invece considerare come quoziente il 9 stesso, che va trascritto accanto al 2 della prima riga orizzontale; otteniamo 29.



7. Moltiplichiamo tale valore (29) per il quoziente stesso, cioè per 9: ($29 \cdot 9 = 261 < 280$). Nel caso in cui il prodotto fosse stato maggiore di 280 avremmo dovuto diminuire il precedente quoziente di una unità fino a quando il prodotto ottenuto fosse risultato minore del primo resto. Tale numero è la seconda cifra della nostra radice e si trascrive accanto alla prima.



8. Calcoliamo il secondo resto sottraendo il prodotto ottenuto da 280 ($280 - 261 = 19$).



9. Abbassiamo il terzo gruppo di cifre, che inseriamo accanto al secondo resto e stacchiamo l'ultima cifra a destra. Otteniamo 192.5.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.80.25} & 19 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \cline{1-1}
2\,80 & \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
192.5 &
\end{array}$$

10. Raddoppiamo il numero formato dalle prime due cifre della radice ($19 \cdot 2 = 38$), oppure sommiamo i due fattori del primo prodotto ($29 + 9 = 38$), e lo trascriviamo sotto la riga orizzontale.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.80.25} & 19 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \hline
2\,80 & 38 \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
192.5 &
\end{array}$$

11. Ripetiamo la stessa procedura utilizzata al punto **6**, calcoliamo cioè il quoziente approssimato per difetto tra 192 e il valore della seconda radice raddoppiata ($192 : 38 = 5$) e lo scriviamo accanto al 38.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.80.25} & 19 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \hline
2\,80 & 385 \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
192.5 &
\end{array}$$

12. Moltiplichiamo il valore ottenuto per lo stesso quoziente approssimato, cioè per 5 ($385 \cdot 5 = 1925$).

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.80.25} & 19 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \hline
2\,80 & 385 \cdot 5 = 1\,925 \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
192.5 &
\end{array}$$

13. Calcoliamo il terzo resto, come abbiamo già fatto al punto **8**, sottraendo il prodotto ottenuto da 1925 ($1925 - 1925 = 0$).

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.80.25} & 19 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \hline
2\,80 & 385 \cdot 5 = 1\,925 \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
19\,2.5 & \\
19\,2.5 & \\ \cline{1-1}
0 & \leftarrow \textit{terzo resto}
\end{array}$$

14. Avendo ottenuto come ultimo resto 0, il calcolo della radice si conclude. L'ultimo quoziente ottenuto (5), rappresenta la terza cifra della nostra radice e, come al solito, deve essere scritta accanto alle prime due cifre già calcolate.

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{terza cifra di radice} \\
\sqrt{3.80.25} & 195 \\ \cline{2-2}
1 & 29 \cdot 9 = 261 \\ \hline
2\,80 & 385 \cdot 5 = 1\,925 \\
2\,61 & \\ \cline{1-1}
19\,2.5 & \\
19\,2.5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Poiché l'ultimo resto è uguale a 0, il numero 38025 è un quadrato perfetto, pertanto la sua radice quadrata è esatta, infatti: $195^2 = 38025$.

L'approssimazione della radice quadrata oltre la parte intera

Nell'esempio precedente ci siamo occupati di una radice quadrata esatta. Vogliamo adesso impostare un procedimento che ci consenta di proseguire il calcolo oltre la parte intera per ottenere un'approssimazione maggiore. Naturalmente dobbiamo stabilire, prima di eseguire il calcolo della radice quadrata, a quale cifra dopo la virgola vogliamo fermare le operazioni. Abbiamo già det-

to che le radici quadrate dei quadrati non perfetti sono numeri decimali illimitati e pertanto la procedura di calcolo non ha mai termine.
Consideriamo, ad esempio, il numero 4532 ed eseguiamo l'algoritmo con approssimazione a meno di una unità

$\sqrt{3.80.25}$	19
1	$29 \cdot 9 = 261$
2 80	
2 61	
19	← *secondo resto*

Avendo trovano un resto (43), possiamo dunque dire che 67 è una approssimazione della radice quadrata di 4532 a meno di un'unità.
Per eseguire la **prova** della radice quadrata basta aggiungere al quadrato del risultato approssimato il valore del resto. Nel nostro caso

$$\boxed{67^2 + 43 = 4\,489 + 43 = 4\,532}$$

Vogliamo ora proseguire il calcolo oltre la sua parte intera, con una approssimazione alla prima cifra decimale. Per questo occorre aggiungere al radicando la virgola e **due zeri** (evidenziati in azzurro), inserire la virgola dopo l'ultima cifra del risultato dell'operazione di radice quadrata (in rosso) e abbassare i due zeri aggiunti all'ultimo resto.
La procedura di calcolo continua quindi nel modo precedentemente descritto:

- moltiplichiamo 67 per 2 (134);
- calcoliamo il quoziente fra 430 e 134 ovvero 3 che scriviamo di fianco al 134 (1 343) e moltiplichiamo tale numero per il quoziente (3). Il risultato (4029) è minore di 4300, quindi 3 è la terza cifra (decimale) della radice.

La radice quadrata approssimata per difetto a meno di un decimo è quindi 67,3.
Eseguendo la prova otteniamo: $67{,}3^2 + 2{,}71 = 4529{,}29 + 2{,}71 = 4532$.
Allo stesso modo se avessimo voluto un'approssimazione ai centesimi avremmo dovuto aggiungere quattro zeri; per un'approssimazione ai millesimi avremmo dovuto aggiungere sei zeri e così via.

$\sqrt[0,1]{45.32,\ 0\ 0}$	67,
36	$127 \cdot 7 = 889$
9 3.2	
8 8 9	
4 3 0 0	

$\sqrt[0,1]{45.32,\ 0\ 0}$	67,3
36	$127 \cdot 7 = 889$
9 3.2	$1343 \cdot 3 = 4029$
8 8 9	
4 3 0.0	
4 0 2 9	
2 7 1	

resto che, avendo fissato un'approssimazione ai decimi, corrisponde a 271 : 100 = 2,71

L'algoritmo della radice quadrata di un numero decimale

Per calcolare la radice quadrata di un numero decimale si ricorre allo stesso procedimento utilizzato per il calcolo della radice quadrata di un numero naturale, non prima di aver pareggiato le cifre decimali in base all'approssimazione richiesta e inserito la virgola dopo l'ultima cifra intera del risultato della radice quadrata. I casi che si possono presentare sono due.

Primo caso Numero decimale limitato

Le cifre decimali vengono pareggiate inserendo, dopo l'ultima cifra decimale, un certo numero di zeri che dipendono dall'approssimazione richiesta. Calcoliamo, ad esempio, la radice quadrata di 657,7 con una approssimazione ai decimi.

$\sqrt[0,1]{657{,}70}$ ← si aggiunge uno 0 per pareggiare le cifre decimali.

Da questo punto in poi si utilizza il procedimento di calcolo illustrato a proposito della radice quadrata di un numero naturale, ricordandosi di inserire la virgola dopo aver ottenuto la radice approssimata all'unità.
Il resto, avendo fissato un'approssimazione ai decimi, corrisponde a
234 : 100 = 2,34.

$\sqrt[0,1]{6.57,70}$	25,6
4	46 · 6 = 276
2 5.7	45 · 5 = 225
2 2 5	506 · 6 = 3 036
3 2 7.0	
3 0 3 6	
2 3 4	

Secondo caso Numero decimale illimitato periodico

Le cifre decimali vengono pareggiate utilizzando le cifre stesse del periodo in base all'approssimazione richiesta. Calcoliamo, ad esempio, la radice quadrata di $54,\overline{35}$ con una approssimazione ai centesimi.

$\sqrt{54,3535}$ (0,01) $\leftarrow$ si pareggiano le cifre decimali utilizzando le cifre stesse del periodo.

Da questo punto in poi si utilizza il procedimento di calcolo illustrato a proposito della radice quadrata di un numero naturale, non dimenticando di inserire la virgola dopo aver ottenuto la radice approssimata all'unità.
Il resto, avendo fissato un'approssimazione ai centesimi, corrisponde a
366 : 10000 = 0,0366.

$\sqrt[0,01]{54,35.35}$	7,37
49	143 · 3 = 429
5 3.5	1 467 · 7 = 10 269
4 2 9	
1 0 6 3.5	
1 0 2 6 9	
3 6 6	

ESERCIZI

1 Per verificare se l'algoritmo del calcolo della radice quadrata è stato eseguito correttamente:
a. si determina il quadrato della radice, lo si sottrae al resto, e si controlla che il risultato sia uguale al radicando;
b. si determina il quadrato della radice, lo si aggiunge al resto, e si controlla che il risultato sia uguale al radicando;
c. si determina il prodotto della radice, lo si aggiunge al resto, e si controlla che il risultato sia uguale al radicando.

2 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcola il valore della radice quadrata di 3 256, con l'approssimazione all'unità, mediante l'algoritmo di estrazione della radice quadrata.

a. $\sqrt{32.56}$

Procedendo da destra verso sinistra, si suddivide il numero in gruppi di 2 cifre.

b.

$\sqrt{32.56}$	5

Si determina il numero intero più grande che moltiplicato per se stesso non supera il 1º gruppo di cifre.

c.

$\sqrt{32.56}$	5
25	
7	

Si calcola il quadrato della prima cifra del risultato e lo si sottrae dal 1º gruppo di cifre. Il numero ottenuto è il 1º resto.

d.

$\sqrt{32.56}$	5
25	
75.6	

Si abbassa il 2º gruppo di cifre trascrivendole accanto al 1º gruppo e separando l'ultima cifra a destra con un puntino.

e.

$\sqrt{32.56}$	5
25	10
75.6	

Si raddoppia la prima cifra del risultato finora calcolato e si trascrive sotto il risultato stesso.

f.

$\sqrt{32.56}$	5
25	107
75.6	

Si calcola il quoziente approssimato per difetto tra 75 e 10 che va trascritto accanto al numero raddoppiato; otteniamo 107.

g.

$\sqrt{32.56}$	57
25	$107 \cdot 7 = 749$
75.6	

Si moltiplica 107 per 7. Il prodotto ottenuto è minore del resto pertanto tale numero è la seconda cifra della nostra radice e va trascritta dopo la prima cifra.

h.

$\sqrt{32.56}$	57
25	$107 \cdot 7 = 749$
756	
749	
7	

Si calcola il 2º resto sottraendo il prodotto ottenuto da 756; avendo ottenuto il resto diverso da zero la nostra radice quadrata è approssimata per difetto a meno dell'unità.

Per effettuare la prova basta elevare al quadrato il risultato ottenuto e aggiungere a tale risultato il resto: $57^2 + 7 = 3\,249 + 7 = 3\,256$.

3 Mediante l'algoritmo di calcolo della radice quadrata, determina la radice quadrata dei seguenti quadrati perfetti:

a. 62 001; **b.** 204 304; **c.** 525 625.

4 Calcola il valore delle seguenti radici quadrate mediante l'algoritmo, con approssimazione all'unità, e verifica il risultato mediante la prova.

a. $\sqrt{4\,516}$; **b.** $\sqrt{14\,321}$; **c.** $\sqrt{12\,715}$.

Mediante l'algoritmo, calcola la radice quadrata dei seguenti numeri naturali con approssimazione ai decimi e verifica il risultato effettuando la prova.

5 **a.** 25 660; **b.** 32 648; **c.** 100 953. [160,1; 180,6; 317,7]

6 **a.** 45 897; **b.** 65 888; **c.** 111 111. [214,2; 256,6; 333,3]

7 **a.** 774 321; **b.** 893 421; **c.** 990 453. [879,9; 945,2; 995,2]

8 **a.** 354 618; **b.** 624 635; **c.** 381 998. [595,4; 790,3; 618,0]

9 **a.** 1 002 345; **b.** 5 238 039; **c.** 9 564 644. [1 001,1; 2 288,6; 3 092,6]

10 **a.** 18 326 159; **b.** 45 194 723; **c.** 85 198 123. [4 280,9; 6 722,7; 9 230,2]

11 **a.** 21 789 000; **b.** 57 874 321; **c.** 86 800 231. [4 667,8; 7 607,5; 9 316,6]

12 **a.** 900 457 863; **b.** 248 944 321; **c.** 856 329 022. [30 007,6; 15 777,9; 292 63,1]

Mediante l'algoritmo, calcola la radice quadrata dei seguenti numeri naturali con approssimazione ai centesimi e verifica il risultato effettuando la prova.

13 a. 22 340; **b.** 65 327; **c.** 88 952. [149,46; 255,59; 298,24]

14 **a.** 27 943; **b.** 35 672; **c.** 40 098. [167,16; 188,87; 200,24]

15 **a.** 556 688; **b.** 660 129; **c.** 784 321. [746,11; 812,48; 885,61]

16 **a.** 896 400; **b.** 997 643; **c.** 999 990. [946,78; 998,82; 999,99]

17 **a.** 990 042; **b.** 106 312; **c.** 176 443. [995,00; 326,05; 420,05]

Mediante l'algoritmo, calcola la radice quadrata dei seguenti numeri naturali con approssimazione ai millesimi e verifica il risultato effettuando la prova.

18 **a.** 35 142; **b.** 81 367; **c.** 84 158. [187,461; 285,249; 290,099]

19 **a.** 14 339; **b.** 56 888; **c.** 887 743. [119,745; 238,512; 942,201]

20 **a.** 89 002; **b.** 222 809; **c.** 443 376. [298,332; 472,026; 665,864]

21 **a.** 100 732; **b.** 233 478; **c.** 554 321. [317,383; 483,195; 744,527]