

APPROFONDIMENTO

I fasci di circonferenze

Quando l'equazione di una circonferenza dipende da un parametro, essa rappresenta un fascio di circonferenze. Anche un fascio di circonferenze può avere due, uno o nessun punto base.

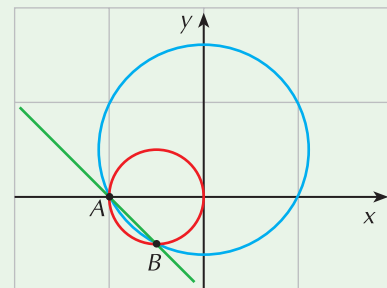
Consideriamo, per esempio, il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 + (k+1)x + ky + k = 0$$

e intersechiamo le due circonferenze che otteniamo per $k=0$ e per $k=-1$:

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=-1 \end{array} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il fascio ha due punti base: $A(-1, 0)$ e $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.



Riprendiamo il sistema precedente e sottraiamo membro a membro le due equazioni:

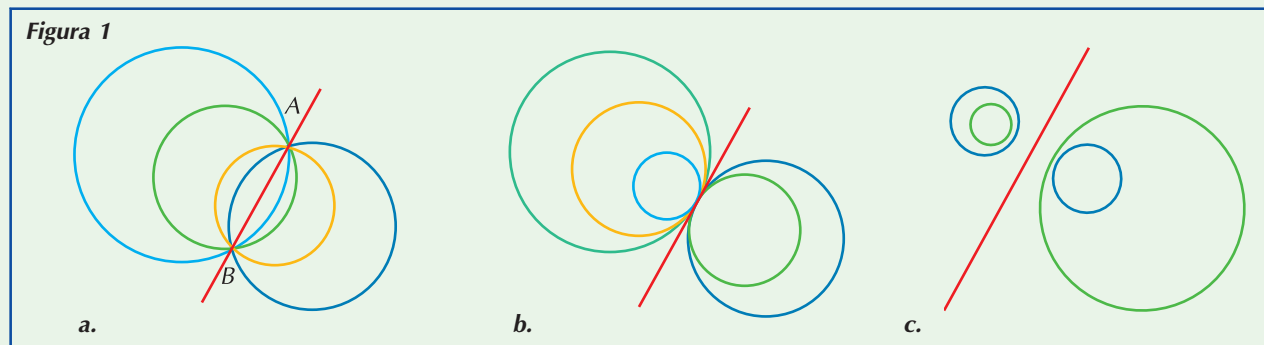
$$(x^2 + y^2 + x) - (x^2 + y^2 - y - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

Otteniamo in questo modo una retta che passa anch'essa per i punti base; tale retta prende il nome di **asse radicale**.

A seconda della posizione delle due circonferenze generatrici avremo vari tipi di fasci:

- se le due circonferenze sono secanti, il fascio ha due punti base e l'asse radicale è la retta che passa per questi due punti (**figura 1a**);
- se le due circonferenze sono tangenti, il fascio ha due punti base coincidenti (in pratica un solo punto) e l'asse radicale è la tangente comune a tutte le circonferenze (**figura 1b**);
- se le due circonferenze non si intersecano, il fascio non ha punti base e l'asse radicale non interseca le due circonferenze (**figura 1c**).

Figura 1



Esempio

Dopo aver individuato i punti base del fascio di equazione $x^2 + y^2 + (k-1)x + (k+2)y + k - 2 = 0$ troviamo la circonferenza del fascio che è tangente alla retta r di equazione $x + y + 2 = 0$.

Troviamo le equazioni di due particolari circonferenze:

$$\begin{aligned} k=0 & \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + 4y = 0 \end{cases} \\ k=2 & \end{aligned}$$

Troviamo così i punti base $A(-1, 0)$ e $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Per individuare la circonferenza tangente a r calcoliamo il centro e il raggio della generica circonferenza del fascio:

$$C\left(\frac{1-k}{2}, -\frac{k+2}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(k-1)^2 + (k+2)^2 - 4(k-2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - 2k + 13}$$

Calcoliamo la distanza di C dalla retta r :
$$\frac{\left|\frac{1-k}{2} - \frac{k+2}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}}$$

Imponiamo che la distanza di C da r sia uguale al raggio; otteniamo così l'equazione

$$\frac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - 2k + 13} \quad \text{da cui ricaviamo che} \quad k = -\frac{17}{8}$$

L'equazione della circonferenza richiesta si ottiene da quella del fascio ponendo $-\frac{17}{8}$ al posto di k ; otteniamo così $8x^2 + 8y^2 - 25x - y - 33 = 0$.

ESERCIZI

1 Del fascio di circonferenze di equazione $(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 2x - 4ky + 2k = 0$ puoi dire che:

a. ha due punti base

V F

b. i centri delle circonferenze si trovano tutti sulla retta $x = 1$

V F

c. ha per asse radicale la retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$.

V F

2 Dopo aver determinato i punti base del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k-6)x + (6-k)y + 9 - 3k = 0$ trova per quali valori di k si ottiene:

a. la circonferenza del fascio che passa per il punto $P(1, 2)$

[5]

b. la circonferenza di raggio 3

[0,6]

c. la circonferenza tangente alla retta $x + y - 5 = 0$.

[-1,7]

3 Dopo aver determinato i punti base del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4x - y + k(x^2 + y^2 - 2x) = 0$ determina per quale valore di k si ottengono:

a. la circonferenza passante per il punto $(2, 1)$

[-12]

b. la circonferenza di raggio 1

$\left[\frac{13}{24}\right]$

c. la circonferenza con centro sull'asse y .

[2]

- 4** Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 8)x - 4k + 16 = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:
- a. la circonferenza passante per O [4]
 - b. la circonferenza di centro $(6, 0)$ [-4]
 - c. le circonferenze tangenti alla retta $y = 4$ [8, -8]
 - d. le circonferenze secanti la retta $y = 4$. [$k < -8 \vee k > 8$]
- 5** Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2(k + 1)x + (k - 1)y - k = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:
- a. la circonferenza Γ_1 avente centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [-3]
 - b. la circonferenza passante per il centro di Γ_1 [-2]
 - c. le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$ [-3; 1]
 - d. la circonferenza avente il centro nell'origine. [$\nexists k$]
- 6** Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + kx - 2y - 2 = 0$, determina il valore di k in modo che la circonferenza corrispondente:
- a. abbia centro sull'asse y [0]
 - b. abbia centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [-2]
 - c. abbia raggio $\sqrt{5}$ [$\pm 2\sqrt{2}$]
 - d. passi per il punto $(2, 2)$ [-1]
 - e. sia tangente all'asse x . [$\nexists k$]
- 7** Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (2k - 1)x - (k + 4)y + k + 3 = 0$ determina k in modo che la circonferenza corrispondente:
- a. abbia centro sull'asse x [-4]
 - b. abbia centro nel primo quadrante [$-4 < k < \frac{1}{2}$]
 - c. passi per l'origine [-3]
 - d. passi per il punto $(-1, -1)$ [$\nexists k$]
 - e. sia tangente all'asse y . [-2]